Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 11 maart 2016

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

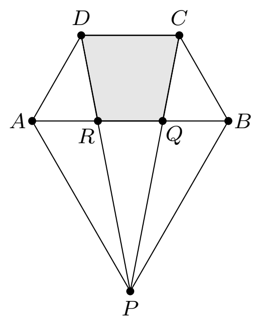
B-opgaven

Bij de B-vragen hoef je alleen het antwoord te geven (bijvoorbeeld een getal). Een uitleg is niet nodig. Voor een goed antwoord krijg je 4 punten en voor een fout of onvolledig antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi+1$.

B1. Hoeveel van de getallen 10 tot en met 99 hebben de eigenschap dat het getal precies viermaal zo groot is als zijn twee cijfers bij elkaar opgeteld?

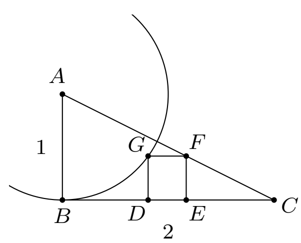
B2. In een doos zitten 100 kaarten die genummerd zijn van 1 tot en met 100. Op elke kaart staat het bijbehorende nummer geschreven. Lisa gaat geblinddoekt een aantal kaarten uit de doos trekken. Daarna gaat ze de nummers op de getrokken kaarten allemaal met elkaar vermenigvuldigen.
Hoeveel kaarten moet Lisa ten minste uit de doos trekken om er zeker van te zijn dat de uitkomst van die vermenigvuldiging deelbaar zal zijn door 6?

B3. In het trapezium $ABCD$ zijn zijden AB en CD evenwijdig en geldt $|BC| = |CD| = |DA| = \frac{1}{2}|AB|$. Op de buitenkant van zijde AB staat een gelijkzijdige driehoek BAP. Het snijpunt van PC en AB noemen we Q en het snijpunt van PD en AB noemen we R (zie de figuur). De oppervlakte van driehoek BAP is 12.
Bepaal de oppervlakte van vierhoek $QCDR$.



B4. Bij kampioenschappen Kolonisten van Catan spelen in elke wedstrijd drie deelnemers tegen elkaar. Tijdens een zeker kampioenschap waren precies drie van de deelnemers meisjes en zij speelden in de eerste wedstrijd tegen elkaar. Elk tweetal deelnemers kwam elkaar in precies één wedstrijd tegen en in iedere wedstrijd speelde minstens één meisje.
Hoeveel deelnemers kunnen er maximaal geweest zijn?

B5. Driehoek ABC heeft een rechte hoek bij B. Verder heeft AB lengte 1 en heeft BC lengte 2. Op zijde BC liggen punten D en E zo dat E tussen C en D ligt en $DEFG$ een vierkant is, waarbij F op AC ligt en G op de cirkel met middelpunt A door het punt B.
Bereken de lengte van DE.



GA VERDER OP DE ACHTERKANT

C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; ook je redenering en de manier van oplossen moet je duidelijk opschrijven. Maak elke C-opgave op een apart vel papier. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Met gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook (per opgave!) je kladpapier in.

C1. Een positief geheel getal noemen we 2016-*invariant* als de som van de cijfers van het getal niet verandert als je 2016 bij het getal optelt. Zo is het getal 8312 bijvoorbeeld 2016-invariant: de som van de cijfers van 8312 is $8 + 3 + 1 + 2 = 14$, en dat is gelijk aan de som van de cijfers van $8312 + 2016 = 10328$, want $1 + 0 + 3 + 2 + 8 = 14$.

(a) Bepaal het grootste getal van vier cijfers dat 2016-invariant is.

(b) Er zijn 9999 positieve gehele getallen met hooguit vier cijfers.
Bereken hoeveel van deze getallen 2016-invariant zijn.

C2. Studenten zitten in een zaal met tafeltjes in examenopstelling. Er zijn n rijen van m tafeltjes en alle tafeltjes zijn bezet. We weten bovendien dat $m \geqslant 3$ en dat $n \geqslant 3$. Studenten die direct achter elkaar, naast elkaar of diagonaal van elkaar zitten zijn *buren*. Studenten in het midden van de zaal hebben dus 8 buren. Voor aanvang van het examen schudt iedere student eenmaal de hand van al zijn buren. In totaal wordt er 1020 keer handen geschud.
Bepaal het aantal studenten.