OP HOEKENJACHT IN HET VERRE OOSTEN

Mike Daas

In juli 2015 vond in Chiang Mai, Thailand, de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats. Het Nederlandse team sleepte hier drie bronzen medailles en een eervolle vermelding in de wacht. Deelnemer en meetkundeliefhebber Mike Daas, inmiddels student wis–, natuur– en sterrenkunde aan de UvA, bespreekt in dit artikel de eerste opgave van wedstrijddag 2: een elementaire maar complexe meetkundeopgave.

Thailand is niet een land waar je zomaar komt. Ik was dan ook uitzinnig toen bekend gemaakt werd dat ik met vijf teamleden daarnaartoe ging. Minder dan drie weken later stapten we al het vliegtuig in voor een vlucht van tien uur om daarna van Bangkok naar Chiang Mai door te reizen. Eerst trainden we nog een week intensief in een mooi hotel; daarna vertrokken we naar het zeer grote en luxueuze hotel waar de IMO gehouden werd. Onder het genot van live muziek in de lobby ontmoetten we veel deelnemers van andere landen; een unieke ervaring, evenals de vele excursies door de tropische en adembenemende omgeving. Natuurlijk werd er ook nog wiskunde gedaan. Op de twee wedstrijddagen besteedden alle deelnemers 4,5 uur aan het oplossen van in totaal zes opgaven. Hieronder doe ik verslag van opgave 4, de eerste opgave van wedstrijddag 2. De opgave luidt als volgt:

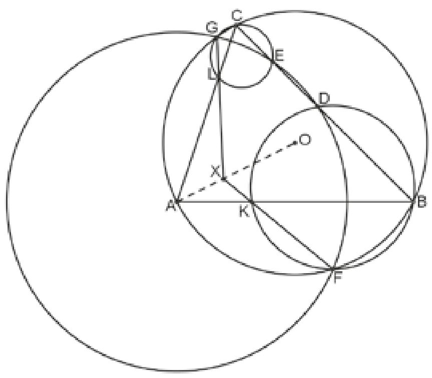
Driehoek ABC heeft omgeschreven cirkel Ω en middelpunt O. Een cirkel Γ met middelpunt A snijdt het lijnstuk BC in de punten D en E, zodanig dat B, D, E en C allemaal verschillend zijn en in deze volgorde op BC liggen. Laat F en G de snijpunten van Γ en Ω zijn, zodanig dat A, F, B, C en G in deze volgorde op Ω liggen. Zij K het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek BDF en het lijnstuk AB. Zij L het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek CGE en het lijnstuk CA. Veronderstel dat de lijnen FK en GL verschillend zijn en elkaar snijden in het punt X. Bewijs dat X op de lijn AO ligt. Zie figuur 2.

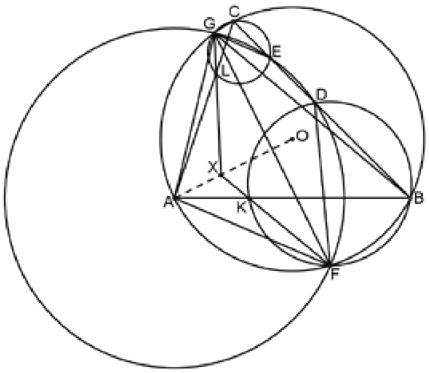
Laten we allereerst kijken wat we weten van het punt X. Afgezien van dat het op FK en GL ligt, weten we er nog eigenlijk niets over. Misschien is het dus een goede stap om te gaan kijken naar het andere deel van wat we moeten bewijzen. Wat weten we van de lijn AO? De punten A en O zijn beide middelpunten van cirkels, namelijk van respectievelijk Γ en Ω. Hieruit volgt dat AO de middelloodlijn is van het lijnstuk FG, gevormd door de snijpunten van die twee cirkels. Als we nu zouden kunnen aantonen dat X ook op de middelloodlijn van FG ligt, dan zijn we klaar. Het mooie is dat we nu het vervelende punt O al kwijt zijn, dus dit klinkt als een goed plan, zie figuur 3.

figuur 1 Van links naar rechts: Yuhui Cheng, Mike Daas, Bob Zwetsloot, Tim Brouwer, Dirk van Bree, Levi van de Pol, Eva van Ammers. Levi is geen teamlid, hij is winnaar van de door het Freudenthal Instituut beschikbaar gestelde aanmoedigingsprijs.

Omdat er zoveel cirkels in ons plaatje zitten, is het verleidelijk om te kijken of we dit zouden kunnen ompraten naar een hoekengelijkheid. Nu is A het middelpunt van Γ, dus geldt dat $|AF| = |AG|$. Als ook nog X op de gewenste middelloodlijn ligt, geldt ook dat $|XF| = |XG|$. Dan volgt uit alle gelijkbenige driehoeken dat $\angle KFA = \angle GFA - \angle GFK = \angle FGA - \angle FGL = \angle LGA$. Omgekeerd, als we

figuur 2





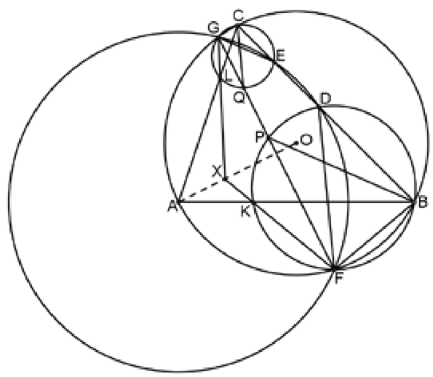
figuur 3

deze laatste hoekengelijkheid zouden kunnen bewijzen, dan hebben we de opgave ook opgelost.
Laten we beginnen bij $\angle KFA$. Helaas kunnen we met deze hoek aanvankelijk nog niet zo lekker hoekenjagen. KA is namelijk geen koorde van een van de cirkels. Het is misschien slimmer om hem te schrijven als het verschil van twee hoeken. Punt D ligt op een cirkel door K en F en op Γ, dus misschien is dit vanuit hoekenjaagperspectief wel interessant. Schrijf nu dus $\angle KFA = \angle DFA - \angle DFK$. Het enige probleem is nu nog dat we van $\angle DFA$ nog niet zoveel weten, afgezien van het feit dat hij gelijk is aan $\angle FDA$. Het zou dus slim kunnen zijn om deze hoek ook op te delen. Op cirkel Γ door D en F liggen verder nog E en G, en op cirkel Ω door F en A liggen ook B, C en G. We zien dat G twee keer voorkomt; erg interessant. Laten we dus schrijven dat $\angle DFA = \angle DFG + \angle GFA$, en dus geldt dat $\angle KFA = \angle DFG + \angle GFA - \angle DFK$. Dit ziet er nog helemaal niet mooi uit, maar dat is het wel. Van alle drie de hoeken aan de rechterkant kunnen we namelijk wat zeggen. We weten bijvoorbeeld dat vierhoek $FDEG$ een koordenvierhoek is, dus zien we dat $\angle DFG = 180° - \angle DEG = \angle CEG$. Verder volgt uit boog GA van Ω dat $\angle GFA = \angle GBA$ en uit boog DK dat $\angle DFK = \angle DBK = \angle CBA$. Alles samennemend kunnen we dus zeggen dat $\angle KFA = \angle CEG + \angle GBA - \angle CBA$. En nu gebeurt er iets moois. We zien dat we $\angle KFA$ kunnen berekenen door $\angle CEG$ te nemen en daar $\angle CBA - \angle GBA$ vanaf te trekken. Merk nu op dat $\angle CBA - \angle GBA = \angle CBG$ en dus kunnen we schrijven dat $\angle KFA = \angle CEG - \angle CBG$. Zo hebben we aan de rechterkant nog maar twee hoeken over. Hiermee kunnen we gewoon vrolijk verder gaan met hoekenjagen. Uit boog CG van de kleine cirkel volgt dat $\angle CEG = \angle CLG$ en uit boog CG van Ω volgt dat $\angle CBG = \angle CAG = \angle LAG$. We kunnen nu dus zeggen dat $\angle KFA = \angle CLG - \angle LAG$. De twee hoekjes aan de rechterkant liggen nu wel weer erg dichtbij elkaar. We kunnen zelfs iets over hen samen zeggen als we de buitenhoekstelling gebruiken in driehoek ALG. Die zegt namelijk dat $\angle LGA + \angle LAG = \angle CLG$. Plotseling volgt hieruit dat $\angle LGA = \angle CLG - \angle LAG = \angle KFA$ en dat is precies wat we wilden laten zien. We hebben de opgave opgelost!

'ERG MOEILIJK OM HET OVERZICHT TE BEWAREN.'

Dit ziet er nu misschien allemaal eenvoudig uit, gewoon een aantal koordenvierhoeken goed gebruiken en vanzelf kom je er wel uit, maar schijn bedriegt. Juist door het grote aantal cirkels in het plaatje is het erg moeilijk om het overzicht te bewaren en juist erg makkelijk om bijvoorbeeld ergens de 'verkeerde' boog te nemen. Ook liggen de punten F, D, E en G vaak nogal naar in het plaatje, waardoor sommige hoekjes erg klein worden en er heel gauw een foutje insluipt. Terwijl bovenstaande oplossing enkel gebruik maakt van de punten die de opgave al gegeven heeft, was mijn eigen idee om de snijpunten te definiëren van FG met de omgeschreven cirkels van driehoek BDF en CEG, want vaak red je het bij IMO–opgaven nou eenmaal niet met alleen maar de punten die zijn gegeven, zie figuur 4. Noem deze nieuwe punten respectievelijk P en Q. Uit koorde KP volgt dat $\angle XFG = \angle KFP = \angle KBP$ en uit koorde LQ volgt dat $\angle XGF = \angle LGQ = \angle LCQ$. Als je om de opgave op te lossen zou willen aantonen dat $\angle XFG = \angle XGF$ dan volstaat het dus te laten zien dat $\angle KBP = \angle LCQ$. Schrijf dat $\angle KBP = \angle KBD - \angle PBD$. Omdat je met $\angle KBD$ niet zoveel kan, is het interessanter om te schrijven dat $\angle KBD = \angle DBF - \angle KBF = \angle CBF - \angle ABF$, waaruit volgt dat $\angle KBP = \angle CBF - \angle ABF - \angle PBD$. Over alle hoekjes aan de rechterkant weten we iets. We zien namelijk dat uit koordenvierhoek $CBFG$ volgt dat $\angle CBF = 180° - \angle CGF = 180° - \angle CGQ$. Verder weten we weer dat vanwege $|AF| = |AG|$ geldt dat $\angle ABF = \angle ACG = \angle LCG$ en dat uit boog DP volgt dat $\angle PBD = \angle PFD = \angle GFD$. We kunnen dus schrijven dat $\angle KBP = 180° - \angle CGQ - \angle LCQ - \angle GFD$. Nu volgt uit het feit dat vierhoek $GFDE$ een koordenvierhoek is, dat $\angle GFD = 180° - \angle GED = \angle GEC$.

figuur 4



Ook zien we dat uit boog CG volgt dat $\angle GQC = \angle CEG = \angle GFD$, dus weten we dat $\angle KBP = 180° - \angle CGQ - \angle LCG - \angle GQC$. Deze hoekjes liggen allemaal erg dicht bij elkaar. We zien nu dat uit de hoekensom in driehoek CQG volgt dat $180° - \angle CGQ - \angle GQC = \angle QCG$ en dus geldt dat $\angle KBP = \angle QCG - \angle LCG = \angle LCQ$, precies wat we wilden laten zien. Jammer genoeg kreeg ik deze oplossing toen niet helemaal rond binnen de tijd, maar omdat ik toch nog tot de helft was gekomen kreeg ik toch nog vier punten. Zo ziet men dat er veel verschillende wegen zijn die naar Rome leiden. Deze twee oplossingen (Op *vakbladeuclides.nl/912daas* vindt u nog een derde bewijs) lijken eenvoudig, maar doordat ze uit zoveel kleine stapjes bestaan, wordt het een complex geheel. Precies zoals het hoort op de IMO. En het plaatje heeft nog meer interessante eigenschappen waar niet naar gevraagd is. Hierdoor worden de deelnemers nog sneller op een zijspoor gebracht. Neem bijvoorbeeld het feit dat $\angle GDK = 90°$. Misschien een leuke opgave voor thuis?

Met dank aan Kees van Schenk Brill, docent van Mike aan het St. Michael College Zaandam (en IMO–deelnemer in 1996).

Websites

De scores van het Nederlandse team:
www.imo–official.org/team_r.aspx?code=NLD&year=2015
Over de Internationale Wiskunde Olympiade:
http://imof.co
Over de Internationale Wiskunde Olympiade 2015:
www.imo2015.org
Over de Nederlandse Wiskunde Olympiade:
www.wiskundeolympiade.nl

vakbladeuclides.nl/912daas

Over de auteur

Mike Daas nam als vwo–scholier van het St. Michael College Zaandam drie jaar lang deel aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade. In 2015 maakte hij deel uit van het Nederlandse team. Nu studeert hij zowel wiskunde als natuur– en sterrenkunde aan de Universiteit van Amsterdam (UvA).
E–mailadres: *dutchmikedaas@gmail.com*