Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 25 maart 2011

Uitwerkingen

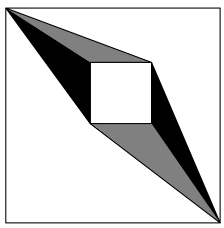
B-opgaven

B1. $\frac{12}{19}$ Noem het aantal aanwezige vrouwen v en het aantal aanwezige mannen m. De opgave vertelt ons dat $\frac{2}{3}v = \frac{3}{5}m$ en dus dat $v = \frac{9}{10}m$. Het aantal mensen dat aan het dansen is, is precies twee keer het aantal mannen dat aan het dansen is, namelijk $\frac{6}{5}m$.

Het aantal aanwezige mensen is natuurlijk $m + v = m + \frac{9}{10}m = \frac{19}{10}m$. Dus we zien dat het deel va de aanwezigen dat aan het dansen is, gelijk is aan

$$\frac{\frac{6}{5}m}{\frac{19}{10}m} = \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{19} = \frac{12}{19}.$$

B2. 10 Het zwarte gebied uit de opgave splitsen we op in vier driehoekjes, waarvan we er twee grijs hebben gemaakt. De twee grijze driehoekjes hebben beide basis 2 en hebben samen hoogte $7-2 = 5$, namelijk de hoogte van het grote vierkant min de hoogte van het kleine vierkant. De oppervlakte van de twee grijze driehoekjes samen is dus $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$. Precies hetzelfde geldt voor de twee zwarte driehoekjes. De totale oppervlakte van het gebied is dus $5 + 5 = 10$.



B3. 7 In totaal zijn er 23 leerlingen. Uit de gegevens volgt:

$$\begin{aligned}
16 + 11 + 10 &= (\text{meisjes met Frans} + \text{jongens met Duits}) + \text{iedereen met Frans} + \text{alle meisjes} \\
&= (\text{meisjes met Frans} + \text{jongens met Duits}) \\
&\quad + (\text{meisjes met Frans} + \text{jongens met Frans}) \\
&\quad + (\text{meisjes met Frans} + \text{meisjes met Duits}) \\
&= 3 \times \text{meisjes met Frans} + \text{jongens met Duits} \\
&\quad + \text{jongens met Frans} + \text{meisjes met Duits} \\
&= 2 \times \text{meisjes met Frans} + 23.
\end{aligned}$$

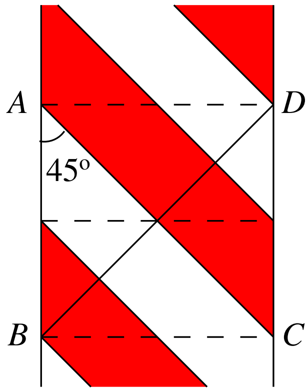
Het aantal meisjes met Frans is dus gelijk aan $\frac{16+11+10-23}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

B4. 198 De eerste keer halen we de kaarten genummerd $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 100^2$ weg. Er blijven dan nog 9900 kaarten over. Omdat $99^2 \leqslant 9900 < 100^2$, halen we in de tweede stap 1^2, $2^2, \ldots, 99^2$ weg. Daarna zijn er nog $9900 - 99 = 9801 = 99^2$ kaarten over, precies een kwadraat.

In het algemeen geldt dat als we beginnen met n^2 kaarten, waarbij $n \geqslant 2$, we in de eerste stap n kaarten weghalen en er $n^2 - n$ kaarten overblijven. Omdat $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 \leqslant n^2 - n < n^2$, halen we in de volgende stap $n - 1$ kaarten weg, waarna er precies $(n^2 - n) - (n - 1) = (n - 1)^2$ kaarten overblijven. In twee stappen gaan we dus van n^2 kaarten naar $(n - 1)^2$ kaarten. We hebben daarom $2 \cdot 99 = 198$ stappen nodig om van 100^2 kaarten naar 1 kaart te gaan.

B5. $\pi\sqrt{2}$ cm Stel je de stok voor als een papieren cilinder. Knip deze in de lengte open en rol hem uit zodat je een rechthoekige strook krijgt. Punt A en D horen dus bij hetzelfde punt op de cilinder, net als punt B en C. De breedte van de strook is gelijk aan de omtrek van de cilinder, dus $|AD| = |BC| = 2\pi \cdot 2$ cm $= 4\pi$ cm.

Omdat het rode lint een hoek van 45° maakt met de kniplijn, is $ABCD$ een vierkant. De lengte van de diagonaal BD is gelijk aan $\sqrt{2} \cdot 4\pi$ cm en ook gelijk aan viermaal de breedte van het rode lint, want de witte en rode banen zijn even breed. Het rode lint is dus $\pi\sqrt{2}$ cm breed.



C-opgaven

C1. Omdat a, b en c opeenvolgende positieve oneven getallen zijn, kunnen we schrijven: $a = 2n - 1$, $b = 2n + 1$ en $c = 2n + 3$, met n een positief geheel getal.
Nu berekenen we:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 \\ &= (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) \\ &= 12n^2 + 12n + 11. \end{aligned}$$

Dit moet gelijk zijn aan een getal dat bestaat uit vier keer het cijfer p. Het getal $12n^2 + 12n$ bestaat dus uit vier cijfers waarvan de eerste twee p zijn en de laatste twee $p - 1$. Omdat $12n^2 + 12n$ deelbaar is door 2, moet $p - 1$ wel even zijn. Dat geeft voor $12n^2 + 12n$ nog de mogelijkheden 1100, 3322, 5544, 7766 en 9988. Het moet echter ook deelbaar zijn door 3, waardoor alleen 5544 overblijft.
We hebben nu gevonden dat $12n^2 + 12n = 5544$, dus $n^2 + n = \frac{5544}{12} = 462$. Dit kunnen we herschrijven als $n^2 + n - 462 = 0$. Dit is een kwadratische vergelijking, die we kunnen ontbinden: $(n - 21)(n + 22) = 0$. Nu moet n een positief geheel getal zijn, dus de enige oplossing is $n = 21$. Hieruit berekenen we het enige drietal dat voldoet: $(a, b, c) = (41, 43, 45)$.

C2. Alle mogelijke scores zijn veelvouden van 5. De laagste score die een scholier kan halen is 0 en de hoogste score is $16 \cdot 10 = 160$. Stel nu eens dat er geen twee scholieren zijn met dezelfde score. Dan is de gezamenlijke score van de scholieren niet meer dan $160 + 155 + 150 + \cdots + 15 = \frac{1}{2} \cdot 175 \cdot 30 = 2625$. We gaan hieruit een tegenspraak afleiden.

Het aantal antwoorden dat goed is en ook binnen een minuut gegeven, noemen we A. Het aantal antwoorden dat goed is, maar niet binnen een minuut gegeven, noemen we B. Ten slotte noemen we het aantal foute antwoorden C. De scholieren hebben samen $16 \cdot 30 = 480$ vragen beantwoord, dus $A + B + C = 480$. Meer dan de helft van de vragen is binnen een minuut goed beantwoord, dus $A > 240$. Verder is gegeven dat $B = C$, zodat $B = C = \frac{480 - A}{2}$. We kunnen nu de gezamenlijke score van de scholieren uitdrukken in A. Deze is:

$$10 \cdot A + 5 \cdot B + 0 \cdot C = 10 \cdot A + 5 \cdot \frac{480 - A}{2} = \tfrac{15}{2}A + 1200.$$

Omdat $A > 240$, is de gezamenlijke score van de scholieren groter dan $\frac{15}{2} \cdot 240 + 1200 = 3000$. Maar uit de aanname dat alle scores verschillend zijn, hadden we afgeleid dat de gezamenlijke score hoogstens 2625 is, een tegenspraak. We concluderen dat de aanname fout was en er dus wel twee scholieren zijn met dezelfde score.