Language **Dutch**

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Opgave 1. Een eindige verzameling gehele getallen noemen we *slecht* als de som van zijn elementen gelijk is aan 2010. Een eindige verzameling gehele getallen is een *Benelux-verzameling* als geen van zijn deelverzamelingen slecht is. Bepaal het kleinste gehele getal n zodanig dat je de verzameling $\{502, 503, 504, \dots, 2009\}$ kunt opdelen (partitioneren) in n Benelux-verzamelingen.
(Een opdeling (partitie) van een verzameling S in n deelverzamelingen is een collectie van n paarsgewijs disjuncte verzamelingen van S, waarvan de vereniging (unie) gelijk is aan S.)

Opgave 2. Bepaal alle polynomen (veeltermen) $p(x)$ met reële coëfficiënten zodanig dat

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Opgave 3. Op een lijn (rechte) l liggen drie verschillende punten A, B en P in die volgorde. Zij a de lijn door A loodrecht op l, en zij b de lijn door B loodrecht op l. Een lijn door P, die niet samenvalt met l, snijdt a in Q en b in R. De lijn door A loodrecht op BQ snijdt BQ in L en snijdt BR in T. De lijn door B loodrecht op AR snijdt AR in K en snijdt AQ in S.

(a) Bewijs dat P, T, S op één lijn liggen.

(b) Bewijs dat P, K, L op één lijn liggen.

Opgave 4. Bepaal alle viertallen (a, b, p, n) van positieve gehele getallen ($a > 0$, $b > 0$, $p > 0$, $n > 0$), zodanig dat p een priemgetal is en

$$a^3 + b^3 = p^n.$$

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Problem 1. A finite set of integers is called *bad* if its elements add up to 2010. A finite set of integers is a *Benelux-set* if none of its subsets is bad. Determine the smallest integer n such that the set $\{502, 503, 504, \ldots, 2009\}$ can be partitioned into n Benelux-sets.
(A partition of a set S into n subsets is a collection of n pairwise disjoint subsets of S, the union of which equals S.)

Problem 2. Find all polynomials $p(x)$ with real coefficients such that

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

for all $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Problem 3. On a line l there are three different points A, B and P in that order. Let a be the line through A perpendicular to l, and let b be the line through B perpendicular to l. A line through P, not coinciding with l, intersects a in Q and b in R. The line through A perpendicular to BQ intersects BQ in L and BR in T. The line through B perpendicular to AR intersects AR in K and AQ in S.

(a) Prove that P, T, S are collinear.

(b) Prove that P, K, L are collinear.

Problem 4. Find all quadruples (a, b, p, n) of positive integers, such that p is a prime and

$$a^3 + b^3 = p^n.$$

Time allowed: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points

Language **French**

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Problème 1. Un ensemble fini d'entiers est appelé *mauvais* si la somme de ses éléments est 2010. Un ensemble fini d'entiers est un *ensemble Benelux* si aucun de ses sous-ensembles n'est mauvais. Trouver le plus petit entier n tel que l'ensemble $\{502, 503, 504, \dots, 2009\}$ puisse être partitionné en n ensembles Benelux.
(Une partition d'un ensemble S en n sous-ensembles est une collection de n sous-ensembles deux à deux disjoints de S, dont l'union est S.)

Problème 2. Déterminer tous les polynômes $p(x)$ à coefficients réels tels que

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Problème 3. La droite l contient trois points distincts A, B et P dans cet ordre. Soit a la perpendiculaire à l passant par A, et soit b la perpendiculaire à l passant par B. Une droite passant par P, distincte de l, coupe a en Q et b en R. La perpendiculaire à BQ passant par A coupe BQ en L et BR en T. La perpendiculaire à AR passant par B coupe AR en K et AQ en S.

(a) Montrer que P, T, S sont alignés.

(b) Montrer que P, K, L sont alignés.

Problème 4. Trouver tous les quadruples (a, b, p, n) d'entiers strictement positifs, tels que p est premier et

$$a^3+b^3=p^n.$$

Language: French

Temps accordé: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Aufgabe 1. Eine endliche Menge ganzer Zahlen heisst *schlecht* wenn die Summe ihrer Elemente 2010 ist. Eine endliche Menge ganzer Zahlen heisst *Benelux-Menge* wenn keine ihrer Teilmengen schlecht ist. Finde die kleinste ganze Zahl n, so dass die Menge $\{502, 503, 504, \ldots, 2009\}$ in n Benelux-Mengen partitioniert werden kann.
(Eine Partition einer Menge S in n Teilmengen ist eine Familie von n paarweise disjunkten Teilmengen von S, deren Vereinigung ganz S ist.)

Aufgabe 2. Finde alle Polynome $p(x)$ mit reellen Koeffizienten so dass

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3. Auf der Geraden l liegen drei verschiedene Punkte A, B und P in dieser Reihenfolge. Sei a die Gerade durch A senkrecht zu l und b die Gerade durch B senkrecht zu l. Eine von l verschiedene Gerade durch P schneidet a in Q und b in R. Die Gerade durch A senkrecht zu BQ schneidet BQ in L und BR in T. Die Gerade durch B senkrecht zu AR schneidet AR in K und AQ in S.

(a) Zeige, dass P, T, S auf einer Geraden liegen.

(b) Zeige, dass P, K, L auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 4. Finde alle Quadrupel (a, b, p, n) natürlicher Zahlen, so dass p eine Primzahl ist und

$$a^3 + b^3 = p^n.$$

Language **Slovenian**

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Naloga 1. Končna množica celih števil je *slaba*, če je vsota njenih elementov enaka 2010. Končna množica celih števil je *Beneluks-množica*, če nobena njena podmnožica ni slaba. Določi najmanjše celo število n, za katero lahko množico $\{502, 503, 504, \ldots, 2009\}$ razbijemo v n Beneluks-množic. (Razbitje množice S v n podmnožic je družina n paroma disjunktnih podmnožic množice S, katerih unija je enaka S.)

Naloga 2. Poišči vse polinome $p(x)$ z realnimi koeficienti, za katere velja

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

za vse $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Naloga 3. Na premici l so dane tri različne točke A, B in P v tem vrstnem redu. Naj bo a premica skozi A, ki je pravokotna na l, b pa premica skozi B, ki je pravokotna na l. Od l različna premica skozi P seka a v Q in b v R. Premica skozi A, ki je pravokotna na BQ, seka BQ v L in BR v T. Premica skozi B, ki je pravokotna na AR, pa seka AR v K in AQ v S.

(a) Dokaži, da so točke P, T in S kolinearne.

(b) Dokaži, da so točke P, K in L kolinearne.

Naloga 4. Poišči vse četverice (a, b, p, n) naravnih števil, kjer je p praštevilo in velja

$$a^3+b^3=p^n.$$

Language: Slovene

Čas: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

Language **Spanish**

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Problema 1. Un conjunto finito de enteros se denomina *malo* si la suma de sus elementos es 2010. Un conjunto finito de enteros se denomina *conjunto Benelux* si ninguno de sus subconjuntos es un conjunto malo. Determinar el menor entero n para el cual existe una partición del conjunto $\{502, 503, 504, \ldots, 2009\}$ en n conjuntos Benelux.
(Una partición de un conjunto S en n subconjuntos es una colección de n subconjuntos de S disjuntos dos a dos, cuya unión es igual a S.)

Problema 2. Determinar todos los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales tales que

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

para todos los $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Problema 3. Los puntos A, B y P están sobre la recta l, en ese orden. Sea a la recta perpendicular a l por A, y sea b la recta perpendicular a l por B. Una recta distinta de l que pasa por P corta a la recta a en Q y a la recta b en R. La perpendicular por A a BQ corta a BQ en L y a BR en T. La perpendicular a AR por B corta a AR en K, y a AQ en S.

(a) Demostrar que P, T, S están alineados.

(b) Demostrar que P, K, L están alineados.

Problema 4. Determinar todas las cuaternas (a, b, p, n) de enteros positivos tales que p es primo y

$$a^3+b^3=p^n.$$

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos