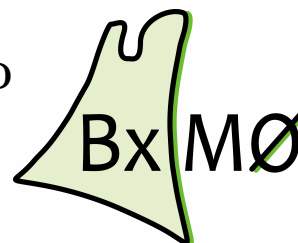


1st BENELUX MATHEMATICAL OLYMPIAD  
Bergen op Zoom (Netherlands)  
May 9, 2009



Language: **Dutch**

**Opgave 1.** Vind alle functies  $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

- $f(n)$  is het kwadraat van een geheel getal voor alle  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ;
- $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$  voor alle  $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

**Opgave 2.** Zij  $n$  een positief geheel getal en zij  $k$  een oneven positief geheel getal. Laat bovendien  $a$ ,  $b$  en  $c$  gehele getallen zijn (niet noodzakelijk positief) waarvoor geldt:

$$a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka.$$

Bewijs dat  $a = b = c$ .

**Opgave 3.** Zij  $n \geq 1$  een geheel getal. In dorp  $X$  wonen  $n$  meisjes en  $n$  jongens; elk meisje hier kent elke jongen. In dorp  $Y$  wonen  $n$  meisjes,  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , en  $2n-1$  jongens,  $b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}$ . Voor  $i = 1, 2, \dots, n$  geldt dat meisje  $g_i$  jongens  $b_1, b_2, \dots, b_{2i-1}$  kent en geen andere jongens. Zij  $r$  een geheel getal met  $1 \leq r \leq n$ . In elk van de dorpen wordt een feest gehouden waarbij  $r$  meisjes uit het betreffende dorp en  $r$  jongens uit hetzelfde dorp geacht worden met elkaar te dansen in  $r$  dansparen. Echter, elk meisje wil alleen dansen met een jongen die ze kent. Noem  $X(r)$  het aantal manieren waarop we  $r$  dansparen kunnen kiezen in dorp  $X$ ; noem  $Y(r)$  het aantal manieren waarop we  $r$  dansparen kunnen kiezen in dorp  $Y$ .

Bewijs dat  $X(r) = Y(r)$  voor  $r = 1, 2, \dots, n$ .

**Opgave 4.** Zij gegeven een trapezium  $ABCD$  met evenwijdige zijden  $AB$  en  $CD$ . Zij  $E$  een punt op de lijn  $BC$ , maar buiten lijnstuk  $BC$ , zodat lijnstuk  $AE$  snijdt met lijnstuk  $CD$ . Neem aan dat er een punt  $F$  bestaat op het inwendige van lijnstuk  $AD$  zodat  $\angle EAD = \angle CBF$ . Zij  $I$  het snijpunt van  $CD$  en  $EF$  en zij  $J$  het snijpunt van  $AB$  en  $EF$ . Zij  $K$  het midden van lijnstuk  $EF$  en neem aan dat  $K$  verschillend is van  $I$  en  $J$ . Bewijs dat  $K$  op de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABI$  ligt dan en slechts dan als  $K$  op de omgeschreven cirkel van  $\triangle CDJ$  ligt.

*Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten  
Elke opgave is 7 punten waard*