1st BENELUX MATHEMATICAL OLYMPIAD
Bergen op Zoom (Netherlands)
May 9, 2009

Language: **Dutch**

Opgave 1. Vind alle functies $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

- $f(n)$ is het kwadraat van een geheel getal voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- $f(m+n) \;=\; f(m)+f(n)+2mn$ voor alle $m,n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Opgave 2. Zij n een positief geheel getal en zij k een oneven positief geheel getal. Laat bovendien a, b en c gehele getallen zijn (niet noodzakelijk positief) waarvoor geldt:

$$a^n + kb \;=\; b^n + kc \;=\; c^n + ka.$$

Bewijs dat $a = b = c$.

Opgave 3. Zij $n \geq 1$ een geheel getal. In dorp X wonen n meisjes en n jongens; elk meisje hier kent elke jongen. In dorp Y wonen n meisjes, g_1, g_2, $\ldots$, g_n, en $2n-1$ jongens, b_1, b_2, $\ldots$, b_{2n-1}. Voor $i = 1, 2, \ldots, n$ geldt dat meisje g_i jongens b_1, b_2, $\ldots$, b_{2i-1} kent en geen andere jongens. Zij r een geheel getal met $1 \leq r \leq n$. In elk van de dorpen wordt een feest gehouden waarbij r meisjes uit het betreffende dorp en r jongens uit hetzelfde dorp geacht worden met elkaar te dansen in r dansparen. Echter, elk meisje wil alleen dansen met een jongen die ze kent. Noem $X(r)$ het aantal manieren waarop we r dansparen kunnen kiezen in dorp X; noem $Y(r)$ het aantal manieren waarop we r dansparen kunnen kiezen in dorp Y.
Bewijs dat $X(r) = Y(r)$ voor $r = 1, 2, \ldots, n$.

Opgave 4. Zij gegeven een trapezium $ABCD$ met evenwijdige zijden AB en CD. Zij E een punt op de lijn BC, maar buiten lijnstuk BC, zodat lijnstuk AE snijdt met lijnstuk CD. Neem aan dat er een punt F bestaat op het inwendige van lijnstuk AD zodat $\angle EAD = \angle CBF$. Zij I het snijpunt van CD en EF en zij J het snijpunt van AB en EF. Zij K het midden van lijnstuk EF en neem aan dat K verschillend is van I en J.
Bewijs dat K op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABI$ ligt dan en slechts dan als K op de omgeschreven cirkel van $\triangle CDJ$ ligt.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard