IMO-selectietoets II

zaterdag 7 juni 2014

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Opgave 1. Zij $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}$ een functie waarvoor geldt: voor alle $n > 1$ is er een priemdeler p van n zodat

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Bovendien is gegeven dat $f(2^{2014}) + f(3^{2015}) + f(5^{2016}) = 2013$.
Bereken $f(2014^2) + f(2015^3) + f(2016^5)$.

Opgave 2. De verzamelingen A en B zijn deelverzamelingen van de positieve gehele getallen. De som van elke twee verschillende elementen uit A is een element van B. Het quotiënt van elke twee verschillende elementen van B (waarbij we de grootste door de kleinste delen) is een element van A. Bepaal het maximale aantal elementen in $A \cup B$.

Opgave 3. Zij H het hoogtepunt van een scherphoekige driehoek ABC. De lijn door A loodrecht op AC en de lijn door B loodrecht op BC snijden elkaar in D. De cirkel met middelpunt C door H snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in de punten E en F. Bewijs dat $|DE| = |DF| = |AB|$.

Opgave 4. Bepaal alle paren (p, q) van priemgetallen waarvoor $p^{q+1} + q^{p+1}$ een kwadraat is.

Opgave 5. Zij $P(x)$ een polynoom met gehele coëfficiënten en graad $n \leq 10$ waarvoor geldt dat er voor elke $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ een gehele m is met $P(m) = k$. Verder is gegeven dat $|P(10) - P(0)| < 1000$. Bewijs dat er voor elke gehele k een gehele m is met $P(m) = k$.