IMO-selectietoets I

vrijdag 6 juni 2014

Uitwerkingen

Opgave 1. Bepaal alle paren (a, b) van positieve gehele getallen waarvoor

$$a^2 + b \mid a^2 b + a \qquad \text{en} \qquad b^2 - a \mid ab^2 + b.$$

Oplossing. Uit $a^2 + b \mid a^2 b + a$ volgt

$$a^2 + b \mid (a^2 b + a) - b(a^2 + b) = a - b^2.$$

Uit $b^2 - a \mid ab^2 + b$ volgt

$$b^2 - a \mid (ab^2 + b) - a(b^2 - a) = b + a^2.$$

We zien dus dat $a^2 + b \mid a - b^2 \mid a^2 + b$. Dat betekent dat $a^2 + b$ op eventueel het teken na gelijk is aan $a - b^2$. We krijgen dus twee gevallen: $a^2 + b = b^2 - a$ en $a^2 + b = a - b^2$. In het tweede geval geldt $a^2 + b^2 = a - b$. Maar $a^2 \geq a$ en $b^2 \geq b > -b$, dus dit is onmogelijk. We moeten dus wel het eerste geval hebben: $a^2 + b = b^2 - a$. Hieruit volgt $a^2 - b^2 = -a - b$, dus $(a + b)(a - b) = -(a + b)$. Aangezien $a + b$ positief is, mogen we erdoor delen en krijgen we $a - b = -1$, dus $b = a + 1$. Alle paren die kunnen voldoen zijn dus van de vorm $(a, a + 1)$ voor een positieve gehele a.

We controleren deze paren. Er geldt $a^2 + b = a^2 + a + 1$ en $a^2 b + a = a^2(a + 1) + a = a^3 + a^2 + a = a(a^2 + a + 1)$, dus aan de eerste deelbaarheidsrelatie wordt voldaan. Verder is $b^2 - a = (a + 1)^2 - a = a^2 + a + 1$ en $ab^2 + b = a(a + 1)^2 + (a + 1) = a^3 + 2a^2 + 2a + 1 = a(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 = (a + 1)(a^2 + a + 1)$, dus aan de tweede deelbaarheidsrelatie wordt ook voldoen. De paren $(a, a + 1)$ voldoen dus en zijn daarmee precies de oplossingen. $\square$

Opgave 2. Zij $\triangle ABC$ een driehoek. Zij M het midden van BC en zij D een punt op het inwendige van zijde AB. Het snijpunt van AM en CD noemen we E. Veronderstel dat $|AD| = |DE|$. Bewijs dat $|AB| = |CE|$.

Oplossing I. Er is maar één configuratie. Zij N het midden van AC. Dan is MN een middenparallel. Wegens Z-hoeken is $\angle EAD = \angle MAB = \angle AMN$, maar ook geldt $\angle EAD = \angle DEA = \angle MEC$. Dus $\angle AMN = \angle CEM$. Als nu S het snijpunt van MN en CE is, dan is $\triangle SEM$ dus gelijkbenig met $|SE| = |SM|$. Verder is SM een middenparallel in driehoek CDB, dus $2|SM| = |DB|$ en is S dan het midden van CD, zodat $|CS| = |SD|$. Als we dit alles combineren, vinden we

$$|CE| = |CS|+|SE| = |SD|+|SE| = 2|SE|+|DE| = 2|SM|+|AD| = |DB|+|AD| = |AB|.$$

□

Oplossing II. Er is maar één configuratie. Zij K een punt op AM zodat M het midden van lijnstuk AK is. Dan snijden AK en BC elkaar middendoor, dus $ABKC$ is een parallellogram. Dat betekent

$$\angle CKA = \angle KAB = \angle EAD = \angle DEA = \angle CEK$$

dus driehoek CKE is gelijkbenig met tophoek C. Daaruit volgt $|CE| = |CK|$. Vanwege het parallellogram is $|CK| = |AB|$, dus $|CE| = |AB|$. □

Oplossing III. We passen Menelaos toe op de lijn door A, E en M in driehoek BCD. Er geldt dus

$$\frac{|BM|}{|MC|} \cdot \frac{|CE|}{|ED|} \cdot \frac{|DA|}{|AB|} = 1.$$

Omdat M het midden van BC is, is $\frac{|BM|}{|MC|} = 1$. En gegeven is dat $|AD| = |DE|$. Dit geeft samen dat $|CE| = |AB|$. □

Oplossing IV. We bewijzen eerst dat A en B aan dezelfde kant van de middelloodlijn van BC liggen. Stel namelijk dat A en C juist aan dezelfde kant liggen of A op de middelloodlijn ligt. Dan geldt $|AB| \geq |AC|$ en zegt de bissectricestelling dus dat de bissectrice vanuit hoek A de zijde BC snijdt tussen M en C. Dus $\angle BAM \leq \angle CAM$. Maar

$$\begin{aligned}\angle AEC &= 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - \angle DAE = 180^\circ - \angle BAM \\ &\geq 180^\circ - \angle CAM = \angle AEC + \angle ACE > \angle AEC.\end{aligned}$$

Tegenspraak. Dit bewijst onze claim.

Spiegel nu A in de middelloodlijn van BC en noem het beeld A'. Dan is $\angle MA'C = \angle MAB = \angle EAD$. Vanwege de gelijkbenigheid is $\angle EAD = \angle DEA = \angle MEC$, dus $\angle MA'C = \angle MEC$. Omdat A' en C aan dezelfde kant van de middelloodlijn van BC liggen en E juist aan de andere kant (want E ligt op AM), betekent dat dat $MCA'E$ een koordenvierhoek is. Daarom is

$$\angle EA'C = 180^\circ - \angle EMC = \angle EMB = \angle AMB = \angle A'MC = \angle A'EC,$$

waarbij we ook de spiegeling nogmaals gebruikt hebben. Dus is driehoek $A'EC$ gelijkbenig met top C. Dus $|CE| = |CA'| = |BA|$. □

Oplossing V. De sinusregel in driehoek MAB geeft

$$\frac{|MB|}{\sin \angle MAB} = \frac{|AB|}{\sin \angle AMB} = \frac{|AB|}{\sin \angle AMC},$$

waarbij het laatste =-teken geldt omdat $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$. De sinusregel in driehoek EMC geeft

$$\frac{|MC|}{\sin \angle MEC} = \frac{|EC|}{\sin \angle EMC}.$$

Er geldt $|MB| = |MC|$ en $\angle AMC = \angle EMC$. Ook is $\angle MAB = \angle EAD = \angle DEA = \angle MEC$. Dit alles combineren geeft

$$\frac{|AB|}{\sin \angle AMC} = \frac{|MB|}{\sin \angle MAB} = \frac{|MC|}{\sin \angle MEC} = \frac{|EC|}{\sin \angle EMC} = \frac{|EC|}{\sin \angle AMC},$$

dus $|AB| = |EC|$. □

Opgave 3. Laat a, b en c rationale getallen zijn waarvoor $a+bc$, $b+ac$ en $a+b$ allemaal ongelijk aan 0 zijn en waarvoor geldt dat

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}=\frac{1}{a+b}.$$

Bewijs dat $\sqrt{(c-3)(c+1)}$ rationaal is.

Oplossing I. Er geldt

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}=\frac{(b+ac)+(a+bc)}{(a+bc)(b+ac)}=\frac{(a+b)+(a+b)c}{ab+a^2c+b^2c+abc^2}.$$

Uit de gegeven gelijkheid volgt dus

$$(a+b)\big((a+b)+(a+b)c\big)=ab+a^2c+b^2c+abc^2,$$

oftewel

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=ab+a^2c+b^2c+abc^2-(a+b)^2c\\&=ab+abc^2-2abc\\&=ab(c-1)^2.\end{aligned}$$

Dus $(c-1)^2=0$ of ab is het kwadraat van een rationaal getal. Als $(c-1)^2=0$, dan is $c=1$ en staat er in de oorspronkelijke vergelijking

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a+b},$$

wat niet waar kan zijn. Dus $(c-1)^2\neq 0$, waaruit volgt dat ab het kwadraat van een rationaal getal is.
Verder zien we dat

$$\begin{aligned}(a-b)^2&=(a+b)^2-4ab\\&=ab+abc^2-2abc-4ab\\&=abc^2-2abc-3ab\\&=ab(c-3)(c+1).\end{aligned}$$

Dus $a=0$ of $b=0$ of $(c-3)(c+1)$ is het kwadraat van een rationaal getal. Als $a=0$ staat er in de oorspronkelijke vergelijking

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{b}=\frac{1}{b}$$

wat niet waar kan zijn. Dus $a\neq 0$ en op vergelijkbare manier zien we dat $b\neq 0$. Dus $(c-3)(c+1)$ is het kwadraat van een rationaal getal. $\square$

Oplossing II. Er geldt

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}=\frac{(b+ac)+(a+bc)}{(a+bc)(b+ac)}=\frac{a+b+ac+bc}{ab+a^2c+b^2c+abc^2}.$$

Uit de gegeven gelijkheid volgt dus

$$(a+b)(a+b+ac+bc)=ab+a^2c+b^2c+abc^2,$$

oftewel

$$a^2+ab+a^2c+abc+ab+b^2+abc+b^2c=ab+a^2c+b^2c+abc^2,$$

oftewel

$$a^2+2abc+ab-abc^2+b^2=0.$$

We kunnen dit zien als kwadratische vergelijking in a, waarvan we weten dat het een rationale oplossing heeft. De discriminant van deze vergelijking moet dus het kwadraat van een rationaal getal zijn. Deze discriminant is gelijk aan

$$\begin{aligned}D&=(2bc+b-bc^2)^2-4b^2\\&=(2bc+b-bc^2-2b)(2bc+b-bc^2+2b)\\&=b^2(2c-1-c^2)(2c+3-c^2)\\&=b^2(c^2-2c+1)(c^2-2c-3)\\&=b^2(c-1)^2(c+1)(c-3).\end{aligned}$$

Net als in de vorige oplossing zien we dat $b=0$ en $c=1$ geen oplossingen geven, dus volgt hieruit dat

$$(c-3)(c+1)=\frac{D}{b^2(c-1)^2}$$

het kwadraat van een rationaal getal is. $\square$

Opgave 4. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met $|AC| = 2|AB|$ en zij O het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Zij D het snijpunt van de bissectrice van $\angle A$ met BC. Zij E de loodrechte projectie van O op AD en zij $F \neq D$ het punt op AD waarvoor $|CD| = |CF|$. Bewijs dat $\angle EBF = \angle ECF$.

Oplossing I. Als $E = F$ zijn hoeken EBF en ECF beide 0, dus aan elkaar gelijk. We nemen dus verder aan dat $E \neq F$. Zij G het tweede snijpunt van AD en de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Er zijn meerdere configuraties mogelijk. We bekijken de configuratie waarbij de punten op de lijn AD in de volgorde A, E, D, G, F liggen, waarbij eventueel mag gelden $D = E$ en $F = G$. Andere configuraties gaan analoog.
Zij M het midden van AC. Omdat $|AB| = \frac{|AC|}{2} = |AM|$ en omdat AD de bissectrice van $\angle BAM$ is, is M het beeld van B onder spiegeling in AD. Er geldt dus $\angle EBF = \angle EMF$, dus om te bewijzen dat $\angle EBF = \angle ECF$ is het voldoende om te bewijzen dat $\angle EMF = \angle ECF$. Dat is equivalent met dat de punten E, M, C en F op een cirkel liggen, aangezien M en C aan dezelfde kant van EF liggen.
Om dit te bewijzen laten we zien dat $\angle EFC + \angle EMC = 180°$, oftewel dat $\angle EFC = \angle AME$. Omdat $\triangle CDF$ gelijkbenig is, vinden we

$$\angle EFC = \angle DFC = \angle FDC = 180° - \angle ADC = \angle DAC + \angle ACD = \frac{\angle A}{2} + \angle C.$$

Verder geldt dat de middelloodlijn van een koorde door het middelpunt van de bijbehorende cirkel gaat, dus MO staat loodrecht op AC. Dit betekent met Thales dat E en M beide op de cirkel met middellijn AO liggen. Hieruit volgt dat $\angle AME = \angle AOE$. Dan is $\triangle AOG$ gelijkbenig, dus hoogtelijn OE is in deze driehoek ook bissectrice. We vinden dus met de middelpunt-omtrekhoeksstelling dat

$$\angle AOE = \frac{\angle AOG}{2} = \angle ACG = \angle ACB + \angle BCG = \angle ACB + \angle BAG = \angle C + \frac{\angle A}{2}.$$

Er geldt dus

$$\angle AME = \angle AOE = \angle C + \frac{\angle A}{2} = \angle EFC,$$

precies wat we moesten bewijzen. □

Oplossing II. Zij $G \neq A$ het snijpunt van AD met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Dan geldt $|AG| = 2|AE|$ omdat de projectie van het middelpunt van een cirkel op een koorde van die cirkel het midden van die koorde is. Zij M het midden van AC. Omdat $|AB| = \frac{|AC|}{2} = |AM|$ en omdat AD de bissectrice van $\angle BAM$ is, is M het beeld van B onder spiegeling in AD. Nu geldt er $\angle DGC = \angle AGC = \angle ABC = \angle ABD = \angle DMA = 180° - \angle DMC$, dus $DMCG$ is een koordenvierhoek. Nu is $AM^2 = \frac{AM \cdot AC}{2} = \frac{AD \cdot AG}{2} = AD \cdot AE$, dus $\triangle AME \sim \triangle ADM$ (zhz). Nu geldt $180° - \angle EMC = \angle EMA = \angle MDA = \angle BDA = \angle CDF = \angle DFC = \angle EFC$, dus $EMCF$ is een koordenvierhoek. Nu is $\angle EBF = \angle EMF = \angle ECF$, precies wat we moesten bewijzen. □

Opgave 5. Op een 2014×2014-bord staat op elk van de 2014^2 vakjes een lamp. Lampen kunnen aan of uit staan. In de beginsituatie is een aantal van de lampen aan. In een zet kies je een rij of kolom waarin minstens 1007 lampen aan staan en verander je van alle 2014 lampen in die rij of kolom de status (van aan naar uit en van uit naar aan). Vind de kleinste niet-negatieve gehele k zodat geldt: vanuit elke beginsituatie kun je in een eindig aantal stappen naar een situatie waarin hoogstens k lampen aan staan.

Oplossing. Nummer de rijen van 1 tot en met 2014 en de kolommen ook. Bekijk de volgende beginsituatie: in rij i zijn de lampen in de kolommen i, $i+1$, $\ldots$, $i+1005$ aan en de rest uit, waarbij we de kolomnummers modulo 2014 rekenen. Nu zijn in elke rij en in elke kolom precies 1006 lampen aan. Er is dus geen zet mogelijk. Het is dus niet altijd mogelijk om naar een situatie met minder dan $2014 \cdot 1006$ lampen aan toe te gaan.
Nu laten we zien dat we wel altijd naar een situatie met hoogstens $2014 \cdot 1006$ lampen aan toe kunnen. Stel uit het ongerijmde dat er in een bepaalde situatie minstens $2014 \cdot 1006 + 1$ lampen aan staan en het toch niet mogelijk is om naar minder lampen aan toe te gaan. Als er een rij of kolom is met 1008 of meer lampen aan, dan kunnen we de status van de lampen in deze rij of kolom veranderen en zijn er daarna minder lampen aan, tegenspraak. Dus in elke rij en kolom staan hoogstens 1007 lampen aan.
Zij I de verzameling rijen met precies 1007 lampen aan en zij J_1 de verzameling kolommen met precies 1007 lampen aan. We zijn van plan om de status van de lampen in alle rijen in I om te zetten. Dit noemen we het *grote plan*. Als na het uitvoeren van het grote plan een kolom ontstaat met 1008 of meer lampen aan, krijgen we weer een tegenspraak, dus we nemen aan dat dat niet zo is. Zij J_2 de verzameling kolommen die na het uitvoeren van het grote plan precies 1007 lampen aan zullen hebben. Als er een vakje (i, j) bestaat met $i \in I$ en $j \in J_1$ waarvan de lamp uit staat, kan ik rij i omzetten en krijg ik in kolom j meer dan 1007 lampen aan, tegenspraak. Dus elke lamp op (i, j) met $i \in I$ en $j \in J_1$ is aan. Als er een vakje (i, j) bestaat met $i \in I$ en $j \in J_2$ waarvan de lamp na het uitvoeren van het grote plan uit staat, krijg ik op dezelfde manier een tegenspraak. Dus elke lamp op (i, j) met $i \in I$ en $j \in J_2$ staat na het uitvoeren van het grote plan aan. Omdat de kolommen in J_2 na het uitvoeren van het grote plan elk precies 1007 lampen aan hebben, hebben ze vóór het uitvoeren van het grote plan dus $1007 - |I|$ lampen aan. *(De notatie $|X|$ geeft het aantal elementen in de verzameling X aan.)* De kolommen in J_1 hebben precies 1007 lampen aan en dit betekent ook dat J_1 en J_2 disjunct zijn (geen overlappende kolommen hebben). De overige kolommen hebben hoogstens 1006 lampen aan. Het totaal aantal lampen aan vóór het grote plan is dus hoogstens

$$(1007 - |I|)|J_2| + 1007|J_1| + 1006(2014 - |J_1| - |J_2|) = 1006 \cdot 2014 + |J_1| + |J_2| - |I| \cdot |J_2|.$$

Dit moet minstens $1006 \cdot 2014 + 1$ zijn, dus $|J_1| + |J_2| - |I| \cdot |J_2| \geq 1$. Hieruit volgt $|J_1| > (|I| - 1)|J_2|$. Als $|I| \geq 2$, dan $|J_1| > |J_2|$. Door het uitvoeren van het grote plan wordt dan dus het aantal kolommen met 1007 lampen aan verkleind. Maar daarna hebben we weer een situatie met $|I|$ rijen met 1007 lampen aan, waarbij J_1 en J_2 precies verwisseld zijn. Dus kunnen we hier een nieuw groot plan uitvoeren waardoor het aantal kolommen met 1007 lampen aan weer kleiner wordt. Tegenspraak, want we zijn nu weer terug in de uitgangssituatie. We concluderen dat moet gelden $|I| = 1$.

We hebben dus de situatie dat er precies één rij is met precies 1007 lampen aan. Analoog kunnen we laten zien dat er ook één kolom moet zijn met precies 1007 lampen aan. Omdat er $1006 \cdot 2014 + 1$ lampen aan staan, moeten er in elke andere rij en kolom precies 1006 lampen aan staan. Verander nu de status van lampen in de rij met 1007 lampen aan. In 1007 kolommen staan vervolgens $1006 + 1 = 1007$ lampen aan. We hebben al gezien dat we in deze situatie het aantal lampen dat aan staat, kunnen verminderen.

We zien dat als er meer dan $1006 \cdot 2014$ lampen aan staan, het altijd mogelijk is om dit aantal te verminderen. Dus de kleinste k is $1006 \cdot 2014$. $\square$