Selectietoets

vrijdag 21 maart 2014

Uitwerkingen

Opgave 1. Vind alle niet-negatieve gehele getallen n waarvoor er gehele getallen a en b bestaan met $n^2 = a + b$ en $n^3 = a^2 + b^2$.

Oplossing I. Vanwege de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde, toegepast op a^2 en b^2, geldt $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Aangezien $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$, volgt hieruit $n^3 \geq (n^2)^2 - n^3$, oftewel $2n^3 \geq n^4$. Dit betekent $n = 0$ of $2 \geq n$. Dus $n = 0$, $n = 1$ en $n = 2$ zijn de enige mogelijkheden. Voor $n = 0$ vinden we $a = b = 0$ als oplossing, voor $n = 1$ vinden we $a = 0$, $b = 1$ als oplossing en voor $n = 2$ vinden we $a = b = 2$ als oplossing. De getallen n die voldoen zijn dus precies $n = 0$, $n = 1$ en $n = 2$. $\square$

Oplossing II. Schrijf $b = n^2 - a$ en vul dat in:

$$n^3 = a^2 + b^2 = a^2 + (n^2 - a)^2 = a^2 + n^4 - 2an^2 + a^2.$$

Dus

$$2a^2 - 2n^2a + n^4 - n^3 = 0.$$

Dit is een kwadratische vergelijking in a, waarvan de discriminant gelijk is aan

$$D = (-2n^2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (n^4 - n^3) = -4n^4 + 8n^3 = 4n^2(-n^2 + 2n).$$

Voor $n \geq 3$ geldt $-n^2 + 2n \leq -3n + 2n = -n < 0$, dus dan is er geen oplossing voor a. Er moet dus gelden $n \leq 2$. Voor $n = 0$ vinden we $a = b = 0$ als oplossing, voor $n = 1$ vinden we $a = 0$, $b = 1$ als oplossing en voor $n = 2$ vinden we $a = b = 2$ als oplossing. De getallen n die voldoen zijn dus precies $n = 0$, $n = 1$ en $n = 2$. $\square$

Opgave 2. Vind alle functies $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt:

$$xf(xy) + f(-y) = xf(x)$$

voor alle reële x, y ongelijk aan 0.

Oplossing. Vul in $x = 1$, dat geeft $f(y) + f(-y) = f(1)$, oftewel $f(-y) = f(1) - f(y)$ voor alle y. Vul nu in $y = -1$, dat geeft $xf(-x) + f(1) = xf(x)$. Als we hierin $f(-x) = f(1) - f(x)$ invullen, krijgen we $x\big(f(1) - f(x)\big) + f(1) = xf(x)$, dus $xf(1) + f(1) = 2xf(x)$. We zien dat f van de vorm $f(x) = c + \frac{c}{x}$ is voor zekere $c \in \mathbb{R}$. Deze familie van functies controleren we. Links staat dan $xf(xy) + f(-y) = x(c + \frac{c}{xy}) + c + \frac{c}{-y} = xc + c$ en rechts staat $xf(x) = x(c + \frac{c}{x}) = xc + c$. Deze twee zijn aan elkaar gelijk, dus deze functie voldoet voor alle $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Opgave 3. In driehoek ABC is I het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Een cirkel raakt aan AI in I en gaat verder door B. Deze cirkel snijdt AB nogmaals in P en BC nogmaals in Q. De lijn QI snijdt AC in R. Bewijs dat $|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2$.

Oplossing. Er is maar één configuratie. Er geldt

$$\begin{aligned}
\angle AIP &= \angle IBP && \text{(raaklijn-omtrekshoekstelling)} \\
&= \angle IBQ && \text{(IB is bissectrice)} \\
&= \angle IPQ && \text{(koordenvierhoek $PBQI$)}
\end{aligned}$$

dus vanwege Z-hoeken geldt nu $AI \parallel PQ$. Dit betekent $\angle IAB = \angle QPB = \angle QIB$, waarbij de laatste gelijkheid geldt vanwege de koordenvierhoek. We hadden al gezien dat $\angle AIP = \angle IBQ$, dus $\triangle IAP \sim \triangle BIQ$ (hh). Dus

$$\frac{|AP|}{|PI|} = \frac{|QI|}{|BQ|}. \tag{1}$$

Daarnaast is $\angle RIA$ de overstaande hoek van een raaklijnhoek en daarom gelijk aan $\angle IPQ$, waarvan we al wisten dat die gelijk is aan $\angle AIP$. Dus $\angle RIA = \angle AIP$. Vanwege de bissectrice AI geldt ook $\angle RAI = \angle PAI$, dus $\triangle RAI \cong \triangle PAI$ (HZH). Hieruit volgt $|AR| = |AP|$. Verder is I het midden van boog PQ, aangezien BI een bissectrice is, dus $|PI| = |QI|$. Deze twee dingen vullen we in in (1):

$$\frac{|AR|}{|PI|} = \frac{|PI|}{|BQ|},$$

waaruit volgt $|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2$. $\square$

Opgave 4. Laat $m \geq 3$ en n positieve gehele getallen zijn met $n > m(m-2)$. Vind het grootste positieve gehele getal d zodat $d \mid n!$ en $k \nmid d$ voor alle $k \in \{m, m+1, \ldots, n\}$.

Oplossing. We gaan bewijzen dat $d = m-1$ de grootste is die voldoet. Merk eerst op dat $m-1 \mid n!$ en dat voor $k \geq m$ geldt $k \nmid m-1$, dus $d = m-1$ voldoet inderdaad.
Stel nu dat voor zekere d geldt: $d \mid n!$ en $k \nmid d$ voor alle $k \in \{m, m+1, \ldots, n\}$. We gaan bewijzen dat $d \leq m-1$. Schrijf $d = p_1 p_2 \cdots p_t$ met p_i priem voor alle i (niet noodzakelijk allemaal verschillend). Als $t = 0$, is $d = 1 \leq m-1$, dus we mogen aannemen $t \geq 1$. Uit de eerste voorwaarde op d volgt $p_i \leq n$ voor alle i. Uit de tweede voorwaarde op d volgt dat $p_i \notin \{m, m+1, \ldots, n\}$ voor alle i. Dus $p_i \leq m-1$ voor alle i. Bekijk nu de getallen p_1, $p_1 p_2$, $\ldots$, $p_1 p_2 \cdots p_t$. Dit zijn allemaal delers van d en daarom allemaal ongelijk aan getallen uit $\{m, m+1, \ldots, n\}$. Verder weten we dat $p_1 \leq m-1$. Bekijk nu de grootste $j \leq t$ waarvoor geldt dat $p_1 p_2 \cdots p_j \leq m-1$. Als $j < t$ geldt

$$p_1 p_2 \cdots p_j p_{j+1} \leq (m-1)p_{j+1} \leq (m-1)(m-1) = m(m-2) + 1 \leq n.$$

Maar dat betekent dat ook $p_1 p_2 \cdots p_j p_{j+1} \leq m-1$. Tegenspraak met de maximaliteit van j. Dus moet gelden $j = t$, oftewel $d = p_1 p_2 \cdots p_t \leq m-1$.
We concluderen dat $d = m-1$ inderdaad de grootste d is die aan de eisen voldoet. $\square$

Opgave 5. Zij n een positief geheel getal. Daniël en Merlijn spelen een spel. Daniël heeft k vellen papier die naast elkaar op tafel liggen, waarbij k een positief geheel getal is. Hij schrijft op elk vel papier een aantal van de getallen 1 tot en met n (geen enkel getal mag ook, alle getallen mag ook). Op de achterkant van elk vel papier schrijft hij juiste de overige getallen van 1 tot en met n. Als Daniël klaar is, mag Merlijn een aantal vellen papier met de achterkant boven leggen (hij mag dit ook bij geen enkel vel of juist alle vellen doen). Als het hem lukt om de getallen 1 tot en met n allemaal tegelijk zichtbaar te maken (waarbij dubbele mogen voorkomen), dan wint hij.
Bepaal de kleinste k waarvoor Merlijn altijd kan winnen, wat Daniël ook doet.

Oplossing I. We geven de vellen papier van Daniël allemaal een andere kleur. Verder hebben we n doosjes met daarop de getallen 1 tot en met n. We zorgen ook voor voldoende beschikbare fiches in precies de kleuren van de vellen papier van Daniël. Per vel bekijkt hij de getallen op de voorkant van het vel en stopt een fiche met de kleur van dit vel in elk van die doosjes. Elk doosje bevat daarna dus de fiches in de kleuren van de vellen papier waar dat getal op de voorkant staat, en juist niet de fiches in de kleuren van de vellen papier waar dat getal op de achterkant staat.
Als Merlijn de door hem gewenste vellen papier met de achterkant boven heeft gelegd, pakt hij uit de voorraad precies de fiches in de kleuren van die vellen. Een getal is niet zichtbaar op tafel precies als de vellen waar dit getal op de voorkant staat, de vellen zijn die Merlijn omgedraaid heeft, oftewel precies als de verzameling fiches in zijn hand gelijk is aan de verzameling fiches in het doosje van dit getal. Merlijn wint dus dan en slechts dan als de verzameling fiches in zijn hand niet voorkomt in één van de doosjes, want dan zijn alle getallen zichtbaar. We beweren nu dat Merlijn kan winnen dan en slechts dan als $2^k > n$. De kleinste k waarvoor Merlijn wint, is dan dus de kleinste k met $2^k > n$.
Stel dat $2^k > n$. Het aantal mogelijke verzamelingen van kleuren is 2^k en daarom groter dan n. Er zijn n doosjes, dus niet alle verzamelingen van kleuren kunnen precies de kleuren van fiches in een doosje zijn. Merlijn kan dus een verzameling kleuren kiezen die niet in een doosje voorkomt en de vellen daarvan met de achterkant boven leggen. Dan wint hij.
Stel nu dat $2^k \leq n$. Daniël vult nu eerst de doosjes met verzamelingen fiches, zodat elke mogelijke verzameling voorkomt in een doosje. Dat kan, want het aantal mogelijke verzamelingen is 2^k en we hebben minstens 2^k doosjes. Nu schrijft Daniël op elk vel gekleurd papier op de voorkant precies de getallen van de doosjes waar een fiche van de juiste kleur in zit, en op de achterkant de rest. Op deze manier corresponderen de fiches in de doosjes weer precies met de getallen op de voorkant van de vellen. Welke verzameling kleuren Merlijn nu ook uitkiest, er is altijd een doosje met precies die verzameling kleuren. Merlijn kan dus niet winnen. □

Oplossing II. We gaan laten zien dat Merlijn kan winnen dan en slechts dan als $2^k > n$. De kleinste k waarvoor Merlijn wint, is dan dus de kleinste k met $2^k > n$.
Stel dat $2^k > n$. Merlijn kiest één voor één bij elk vel of hij het wel of niet omdraait. Bij het eerste vel legt hij de kant boven waar de meeste getallen op staan (dus minstens de

helft van de getallen 1 tot en met n). Bij elk volgende vel legt hij de kant naar boven waar zoveel mogelijk getallen op staan die hij nog niet op eerdere vellen zichtbaar had liggen. Laat b_j het aantal getallen zijn dat nog niet zichtbaar is op de vellen 1 tot en met j nadat Merlijn voor deze vellen een keuze heeft gemaakt. Dan is $b_1 \leq \frac{1}{2}n$ en $b_j \leq \frac{1}{2}b_{j-1}$ voor $j \geq 2$. Dus $b_j \leq (\frac{1}{2})^j n$ en in het bijzonder $b_k \leq (\frac{1}{2})^k n$. Omdat $2^k > n$, is $(\frac{1}{2})^k n < 1$, dus $b_k < 1$. Omdat b_k geheel moet zijn, geldt $b_k = 0$. Dus na Merlijns keuze voor alle k vellen zijn er geen getallen meer onzichtbaar.
Nu bewijzen we dat voor $2^k \leq n$ Daniël kan zorgen dat Merlijn niet kan winnen. Dit doen we met inductie naar k. Voor $k = 1$ geldt $n \geq 2$. Daniël schrijft nu het getal 1 op de ene kant van het vel en alle andere getallen (dat is er minstens één) op de andere kant. Merlijn kan dit vel nu niet zo draaien dat hij kan winnen. Dat is de inductiebasis. Zij nu $k \geq 1$ en neem aan dat Daniël k vellen zo kan beschrijven met $n \geq 2^k$ getallen dat Merlijn niet kan winnen. We bekijken nu $k + 1$ vellen. Beschrijf de eerste k vellen op zo'n manier met de getallen 1 tot en met 2^k dat Merlijn met alleen die getallen niet kan winnen; dit kan volgens de inductiehypothese. Schrijf vervolgens op elk vel weer dezelfde getallen voor en achter, maar dan verhoogd met 2^k, zodat deze getallen van $2^k + 1$ tot en met 2^{k+1} lopen. Schrijf ten slotte alle getallen m met $2^{k+1} < m \leq n$ op de achterkant van elk vel. Nu bevat elk van deze k vellen de getallen 1 tot en met n. Op vel nummer $k + 1$ schrijven we aan de voorkant de getallen 1 tot en met 2^k en aan de achterkant de getallen $2^k + 1$ tot en met n. Stel dat Merlijn het laatste vel met de voorkant boven laat liggen. Dan moet hij in ieder geval de getallen $2^k + 1$ tot en met 2^{k+1} nog zichtbaar maken op de eerste k vellen, maar dat kan niet volgens de inductiehypothese. Stel dat Merlijn het laatste vel juist met de achterkant boven legt. Dan moet hij de getallen 1 tot en met 2^k nog zichtbaar maken op de eerste k vellen, maar dat kan ook weer niet volgens de inductiehypothese. Merlijn kan dus met deze vellen niet winnen. Dit voltooit het bewijs. $\square$