Uitwerkingen toets 12 juni 2010

Opgave 1. Bekijk rijen a_1, a_2, a_3, $\ldots$ van positieve gehele getallen. Bepaal de kleinst mogelijke waarde van a_{2010} als gegeven is:

(i) $a_n < a_{n+1}$ voor alle $n \geq 1$,

(ii) $a_i + a_l > a_j + a_k$ voor alle viertallen (i, j, k, l) met $1 \leq i < j \leq k < l$.

Oplossing. We bewijzen met inductie dat $a_n - a_1 \geq 2^{n-1} - 1$ voor alle $n \geq 2$. Voor $n = 2$ staat hier $a_2 - a_1 \geq 1$ en dat volgt uit voorwaarde (i). Zij nu $m \geq 2$ en stel dat $a_m - a_1 \geq 2^{m-1} - 1$. We passen voorwaarde (ii) toe met $i = 1$, $j = k = m$ en $l = m + 1$. We vinden dat $a_1 + a_{m+1} > 2a_m$. Dus

$$a_{m+1} - a_1 > 2a_m - 2a_1 \overset{\text{IH}}{\geq} 2(2^{m-1} - 1) = 2^m - 2,$$

en aangezien a_{m+1} positief en geheel is, volgt hieruit $a_{m+1} - a_1 \geq 2^m - 1$. Dit voltooit de inductie.
Nu zien we dat voor $n \geq 1$ geldt:

$$a_n \geq 2^{n-1} - 1 + a_1 \geq 2^{n-1}$$

en in het bijzonder $a_{2010} \geq 2^{2009}$.
Anderzijds bewijzen we dat $a_{2010} = 2^{2009}$ mogelijk is door te laten zien dat de rij gegeven door $a_n = 2^{n-1}$ aan de voorwaarden voldoet. Deze rij bestaat uit positieve gehele getallen en is strikt stijgend (voorwaarde (i)). Zij nu (i, j, k, l) een viertal dat voldoet aan $1 \leq i < j \leq k < l$. Er geldt

$$a_j + a_k = 2^{j-1} + 2^{k-1} \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k \leq 2^{l-1} < 2^{i-1} + 2^{l-1},$$

dus ook aan voorwaarde (ii) is voldaan.
We concluderen dat de kleinst mogelijke waarde van a_{2010} gelijk is aan 2^{2009}. $\square$

Opgave 2. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$f(x) = \max_{y\in\mathbb{R}} (2xy - f(y))$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.
(In het algemeen betekent de uitdrukking $a = \max_{s\in S} g(s)$: er geldt $a \geq g(s)$ voor alle $s \in S$ en bovendien is er een $s \in S$ waarvoor $a = g(s)$.)

Oplossing. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$f(x) = \max_{y\in\mathbb{R}} (2xy - f(y)) \geq 2x^2 - f(x),$$

dus $2f(x) \geq 2x^2$, oftewel $f(x) \geq x^2$.
Omdat $(x - y)^2 \geq 0$, geldt $x^2 \geq 2xy - y^2$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. Omdat we al hebben laten zien dat $f(y) \geq y^2$, geldt $2xy - f(y) \leq 2xy - y^2 \leq x^2$ en dus

$$f(x) = \max_{y\in\mathbb{R}} (2xy - f(y)) \leq x^2.$$

We concluderen $f(x) = x^2$.
We controleren nog dat deze functie voldoet. Kies een willekeurige $x \in \mathbb{R}$. Omdat $(x-y)^2 \geq 0$, geldt $x^2 \geq 2xy - y^2$ voor alle $y \in \mathbb{R}$ met gelijkheid als $x = y$, dus

$$x^2 = \max_{y\in\mathbb{R}} (2xy - y^2).$$

$\square$

Opgave 3.

(a) Laat a en b positieve gehele getallen zijn zodat $M(a,b) = a - \frac{1}{b} + b\left(b + \frac{3}{a}\right)$ een geheel getal is. Bewijs dat $M(a,b)$ een kwadraat is.

(b) Vind gehele getallen a en b, beide ongelijk aan nul, zodat $M(a,b)$ een positief geheel getal is, maar geen kwadraat.

Oplossing.

(a) Omdat $a + b^2$ een geheel getal is, is ook $-\frac{1}{b} + \frac{3b}{a}$ een geheel getal. Dit kunnen we schrijven als $\frac{-a+3b^2}{ab}$. We zien dat ab een deler is van $3b^2 - a$. In het bijzonder is b een deler van $3b^2 - a$ en dus geldt $b \mid a$. Maar dat betekent dat b^2 een deler is van ab en dus ook van $3b^2 - a$, waaruit volgt $b^2 \mid a$. We schrijven nu $a = mb^2$ met m een positief geheel getal. Dan geldt dat mb^3 een deler is van $3b^2 - mb^2$, dus is mb een deler van $3 - m$. Hieruit volgt dat m een deler is van 3 (oftewel $m = 1$ of $m = 3$) en dat b een deler is van $3 - m$.

Stel eerst dat $m = 3$. Dan geldt $a = 3b^2$. Dit invullen geeft $M(3b^2, b) = 3b^2 - \frac{1}{b} + b^2 + \frac{1}{b} = 4b^2$ en dat is het kwadraat van $2b$.

Stel nu dat $m = 1$. Uit $b \mid 3 - m$ volgt nu $b = 1$ of $b = 2$. In het eerste geval geldt $a = 1$ en in het tweede geval geldt $a = 4$. De eerste mogelijkheid invullen geeft $M(1,1) = 1 - 1 + 1 + 3 = 4$ en dat is een kwadraat. De tweede mogelijkheid invullen geeft $M(4,2) = 4 - \frac{1}{2} + 4 + \frac{3}{2} = 9$ en dat is ook een kwadraat.

We concluderen dat $M(a,b)$ in alle gevallen een kwadraat is.

(b) Neem $a = 4$ en $b = -2$. Dan geldt $M(4,-2) = 7$. Dat is een positief geheel getal, maar geen kwadraat. *Na al het werk van onderdeel (a) is dit antwoord niet moeilijk te vinden. Je weet dat a van de vorm mb^2 moet zijn, nu met $m \in \mathbb{Z}$, en dat m een deler moet zijn van 3. Bovendien werkt $m = 3$ niet, want dan krijgen we altijd een kwadraat. De rest van de mogelijkheden voor m kun je simpel uitproberen.*

□

Opgave 4. Gegeven is een vierkant $ABCD$ met omgeschreven cirkel Γ_1. Zij P een punt op boog AC waar ook B op ligt. Een cirkel Γ_2 raakt inwendig aan Γ_1 in P en raakt daarnaast diagonaal AC in Q. Zij R een punt op Γ_2 zodat de lijn DR raakt aan Γ_2. Bewijs dat $|DR| = |DA|$.

Oplossing I. Zij M het snijpunt van AC en BD (oftewel het middelpunt van Γ_1) en zij N het middelpunt van Γ_2. We gaan allereerst bewijzen dat P, Q en D op een lijn liggen. Als $P = B$, dan is $Q = M$ en is het triviaal. Zo niet, definieer dan S als het snijpunt van PQ en BD. We willen bewijzen dat $S = D$. Merk op dat M, N en P op een lijn liggen en dat QN evenwijdig is aan DB. Hieruit volgt wegens F-hoeken $\angle PSB = \angle PQN = \angle NPQ$, dat laatste vanwege $|NP| = |NQ|$. Met Z-hoeken zien we dat $\angle PMB = \angle MNQ$ en vanwege de buitenhoekstelling in driehoek PQN is dat gelijk aan $\angle PQN + \angle NPQ = 2\angle PSB$. Dus $\angle PMB = 2\angle PSB$, waaruit met de middelpuntsomtrekshoekstelling volgt dat S op Γ_1 ligt. Dus $S = D$, waaruit volgt dat P, Q en D op een lijn liggen.
Omdat $\angle DPB = \angle DMQ = 90°$ en $\angle PDB = \angle QDM$, geldt $\triangle DPB \sim \triangle DMQ$. Hieruit volgt $\frac{|DP|}{|DB|} = \frac{|DM|}{|DQ|}$. Aangezien $|DB| = 2|DM|$, staat hier $|DP||DQ| = 2|DM|^2$. Uit de machtstelling op Γ_2 volgt $|DP||DQ| = |DR|^2$, dus $|DR| = \sqrt{2}|DM| = |DA|$. □

Oplossing II. Zij M het snijpunt van AC en BD (oftewel het middelpunt van Γ_1) en zij N het middelpunt van Γ_2. We gaan allereerst bewijzen dat P, Q en D op een lijn liggen. Bekijk een puntvermenigvuldiging vanuit P die N overvoert in M. Dan gaat Γ_2 over in Γ_1. De raaklijn AC aan Γ_2 gaat over in een lijn evenwijdig aan AC die raakt aan Γ_1. Dit moet de raaklijn in D zijn. Dus Q gaat over in D, waaruit volgt dat P, Q en D op een lijn liggen.
Verder gaat het bewijs zoals in de eerste oplossing. □

Opgave 5. Het polynoom $A(x) = x^2 + ax + b$ met gehele coëfficiënten heeft de eigenschap dat voor elk priemgetal p er een geheel getal k bestaat zodat $A(k)$ en $A(k+1)$ beide deelbaar zijn door p. Bewijs dat er een geheel getal m bestaat zodat $A(m) = A(m+1) = 0$.

Oplossing I. Zij p een priemgetal en zij k zodat $A(k)$ en $A(k+1)$ beide deelbaar zijn door p. Het verschil van $A(k)$ en $A(k+1)$ is dan ook deelbaar door p en dit is gelijk aan

$$A(k+1) - A(k) = (k+1)^2 + a(k+1) + b - (k^2 + ak + b) = 2k + 1 + a,$$

dus $2k \equiv -1 - a \mod p$. Omdat $A(k)$ deelbaar is door p, is $4A(k)$ dat ook, dus modulo p geldt

$$4A(k) = 4k^2 + 4ak + 4b \equiv (-1-a)^2 + 2(-1-a)a + 4b = -a^2 + 4b + 1 \mod p.$$

De rechterkant is niet meer afhankelijk van k. We zien dus dat voor elk priemgetal p het getal $-a^2 + 4b + 1$ deelbaar moet zijn door p. Dit kan alleen als $-a^2 + 4b + 1 = 0$. Dus geldt $a^2 = 4b + 1$. We zien dat a oneven moet zijn en we schrijven $a = 2c + 1$ met $c \in \mathbb{Z}$. Dan geldt $4b + 1 = a^2 = 4c^2 + 4c + 1$, dus $b = c^2 + c$. Het polynoom is daarom van de vorm $A(x) = x^2 + (2c+1)x + (c^2 + c)$ met c geheel. We kunnen dit ontbinden als $A(x) = (x+c)(x+c+1)$, waaruit volgt dat $x = -c$ en $x = -c - 1$ de nulpunten zijn van het polynoom. Deze zijn beide geheel. We concluderen dat $m = -c - 1$ voldoet aan $A(m) = A(m+1) = 0$. $\square$

Oplossing II. Zoals in de eerste oplossing vinden we voor alle p en bijbehorende k dat $2k \equiv -1 - a \mod p$. Als we dit toepassen voor $p = 2$, zien we dat a oneven is. Dus $-1 - a$ is even. Voor oneven p mogen we delen door 2 en geldt dus $k \equiv \frac{-1-a}{2} \mod p$. Zij nu $k_0 = \frac{-1-a}{2}$. Dan geldt $k_0 \equiv k \mod p$ en daarom ook $A(k_0) \equiv A(k) \equiv 0 \mod p$. Net zo geldt $A(k_0 + 1) \equiv A(k+1) \equiv 0 \mod p$. Merk op dat k_0 onafhankelijk is van p. Het getal $A(k_0)$ is deelbaar door p voor oneindig veel priemgetallen p (namelijk alle oneven p) en moet dus wel gelijk zijn aan 0. Zo ook is $A(k_0+1)$ gelijk aan 0. Dus $m = k_0$ voldoet. $\square$