Uitwerkingen toets 9 juni 2010

Opgave 1. Zij ABC een scherphoekige driehoek met de eigenschap $\angle BAC = 45°$. Zij D het voetpunt van de loodlijn vanuit C op AB. Zij P een inwendig punt van het lijnstuk CD. Bewijs dat de lijnen AP en BC loodrecht op elkaar staan dan en slechts dan als $|AP| = |BC|$.

Oplossing. Zij E het snijpunt van AP en BC. Merk op dat $\angle DCA = 90° - \angle CAD = 90° - \angle CAB = 45°$, dus $\triangle ACD$ is gelijkbenig: $|AD| = |CD|$.
Stel nu dat $|AP| = |BC|$. Omdat $\angle ADP = 90° = \angle CDB$, geldt $\triangle ADP \cong \triangle CDB$ wegens (ZZR). Dus $\angle APD = \angle CBD$, waaruit volgt

$$\angle CEA = \angle CEP = 180° - \angle EPC - \angle PCE = 180° - \angle APD - \angle DCB$$

$$= 180° - \angle CBD - \angle DCB = \angle BDC = 90°,$$

dus AP staat loodrecht op BC.
Stel andersom dat AP loodrecht op BC staat, oftewel $\angle CEP = 90°$. Dan geldt

$$\angle APD = \angle EPC = 90° - \angle PCE = 90° - \angle DCB = \angle CBD.$$

Omdat ook $\angle ADP = 90° = \angle CDB$, volgt nu met (ZHH) dat $\triangle ADP \cong \triangle CDB$. Dus $|AP| = |BC|$. $\square$

Opgave 2. Laat A en B positieve gehele getallen zijn. Definieer de rekenkundige rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ door $a_n = An + B$. Neem aan dat er minstens één $n \geq 0$ is zodat a_n een kwadraat is. Zij M een positief geheel getal zodat M^2 het kleinste kwadraat in de rij is. Bewijs dat $M < A + \sqrt{B}$.

Oplossing. Als $M \leq A$, dan zeker $M < A + \sqrt{B}$, dus zijn we klaar.
Als $M > A$, zij dan k zodat $a_k = M^2$. Dan geldt dus $Ak + B = M^2$. Omdat $0 < M - A < M$, is $(M-A)^2$ kleiner dan M^2. Er geldt $(M-A)^2 = M^2 - 2MA + A^2 = M^2 - A(2M - A)$. Als $k - (2M - A) \geq 0$, dan is

$$a_{k-(2M-A)} = A(k-(2M-A)) + B = (Ak+B) - 2MA + A^2 = M^2 - 2MA + A^2 = (M-A)^2.$$

Maar dan is M^2 niet het kleinste kwadraat in de rij, tegenspraak. Dus geldt $k-(2M-A) < 0$. Hieruit volgt $A(k-(2M-A)) + B < B$, oftewel $(M-A)^2 < B$. Omdat $M - A$ positief is, mogen we concluderen dat $M - A < \sqrt{B}$, oftewel $M < A + \sqrt{B}$. $\square$

Opgave 3. Zij $n \geq 2$ een positief geheel getal en p een priemgetal zodat $n \mid p - 1$ en $p \mid n^3 - 1$. Bewijs dat $4p - 3$ een kwadraat is.

Oplossing I. Uit $n \mid p - 1$ volgt $n < p$. Omdat p priem is, is p een deler van één van de twee factoren van $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$, maar p is te groot om een deler van $n - 1 > 0$ te zijn. Dus $p \mid n^2 + n + 1$. Wegens $n \mid p - 1$ kunnen we p schrijven als $kn + 1$, met k een positief geheel getal. Uit $kn + 1 \mid n^2 + n + 1$ volgt

$$kn + 1 \mid k(n^2 + n + 1) - (n + 1)(kn + 1) = k - n - 1.$$

We onderscheiden nu drie gevallen.
Geval 1: $k > n + 1$. Dan is $k - n - 1$ positief en moet gelden $kn + 1 \leq k - n - 1$. Daaruit volgt $(k + 1)n \leq k - 2$, maar links staat nu iets dat duidelijk groter is dan wat er rechts staat. Dit geval kan dus niet.
Geval 2: $k < n + 1$. Dan is $k - n - 1$ negatief en moet gelden $kn + 1 \leq n + 1 - k$. Daaruit volgt $(k - 1)n \leq -k$, maar links staat nu iets niet-negatiefs en rechts iets negatiefs. Dit geval kan dus ook niet.
Geval 3: $k = n + 1$. Nu geldt $p = (n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1$. Dus $4p - 3 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$ en dit is een kwadraat.
We concluderen dat in het enige mogelijke geval $4p - 3$ een kwadraat is. $\square$

Oplossing II. Zoals in de eerste oplossing laten we zien dat $p \mid n^2+n+1$. Als $p = n^2+n+1$, dan geldt $4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$ en dit is een kwadraat. Stel nu dat $p \neq n^2+n+1$. Dan is er een geheel getal $m > 1$ zodat $pm = n^2 + n + 1$. Modulo n staat hier $pm \equiv 1 \mod n$. Uit $n \mid p - 1$ volgt dat $p \equiv 1 \mod n$, dus we krijgen $m \equiv 1 \mod n$. Dus p en m zijn beide minstens $n+1$. Echter, $(n+1)^2 = n^2+2n+1 > n^2+n+1 = pm$, tegenspraak. $\square$

Opgave 4. Zij $ABCD$ een koordenvierhoek met de eigenschap dat $\angle ABD = \angle DBC$. Zij E het snijpunt van de diagonalen AC en BD. Zij M het midden van AE en N het midden van DC. Bewijs dat $MBCN$ een koordenvierhoek is.

Oplossing I. Omdat $ABCD$ een koordenvierhoek is, weten we dat $\angle BDC = \angle BAC = \angle BAE$. Daarnaast volgt uit het gegeven dat $\angle CBD = \angle EBA$. Samen geeft dit $\triangle DCB \sim \triangle AEB$ (hh). We gaan nu bewijzen dat hieruit volgt $\triangle NCB \sim \triangle MEB$. Allereerst vinden we dat $\angle NCB = \angle DCB = \angle AEB = \angle MEB$. Verder zien we dat $\frac{|NC|}{|ME|} = \frac{2|NC|}{2|ME|} = \frac{|DC|}{|AE|} = \frac{|CB|}{|EB|}$. Met (zhz) concluderen we dat inderdaad $\triangle NCB \sim \triangle MEB$. Dus $\angle BMC = \angle BME = \angle BNC$, waaruit volgt dat $MBCN$ een koordenvierhoek is. $\square$

Oplossing II. Net als in de eerste oplossing leiden we af dat $\triangle DCB \sim \triangle AEB$. Merk nu op dat de lijnen BM en BN zwaartelijnen in deze twee gelijkvormige driehoeken zijn. Daaruit volgt dat de corresponderende hoeken $\angle BME$ en $\angle BNC$ even groot zijn. Dus $\angle BMC = \angle BME = \angle BNC$, waaruit volgt dat $MBCN$ een koordenvierhoek is. $\square$

Oplossing III. Zij K het midden van DE. Nu is MK een middenparallel in driehoek EAD evenwijdig aan AD, dus $\angle MKB = \angle MKE = \angle ADE = \angle ADB$. In koordenvierhoek $ABCD$ zien we $\angle ADB = \angle ACB = \angle MCB$, dus $\angle MKB = \angle MCB$, waaruit volgt dat $MKCB$ een koordenvierhoek is.
Verder is KN een middenparallel in driehoek CED evenwijdig aan CE, dus $180° - \angle KNC = \angle KND = \angle ECD = \angle ACD$. Vanwege koordenvierhoek $ABCD$ geldt $\angle ACD = \angle ABD$ en volgens het gegeven is dit gelijk aan $\angle DBC$. Dus $180° - \angle KNC = \angle DBC = \angle KBC$. Hieruit volgt dat $KNCB$ een koordenvierhoek is.
We concluderen dat zowel M als N op de omgeschreven cirkel van driehoek BCK liggen. Dus $MBCN$ is een koordenvierhoek. $\square$

Opgave 5. Vind alle drietallen (x, y, z) van reële (maar niet noodzakelijk positieve) getallen die voldoen aan

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + z^2) &= 1, \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 &= xyz(x + y + z)^3. \end{aligned}$$

Oplossing. We gaan laten zien dat voor reële getallen x, y en z die aan de eerste voorwaarde voldoen, geldt

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)^3. \tag{1}$$

De oplossingen die we zoeken, zijn dus de gelijkheidsgevallen van deze ongelijkheid.
Laat a, b en c reële getallen zijn. Er geldt $(a - b)^2 \geq 0$, dus $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ met gelijkheid d.e.s.d.a. $a = b$. Dit doen we analoog voor b en c en voor c en a, zodat opgeteld volgt dat

$$a^2 + b^2 + c^2 \;\geq\; ab + bc + ca$$

met gelijkheid d.e.s.d.a. $a = b = c$.
Passen we dit toe op (xy, yz, zx), dan vinden we dat

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xy^2z + yz^2x + zx^2y = xyz(x + y + z)$$

met gelijkheid d.e.s.d.a. $xy = yz = zx$. Door het ook toe te passen op (x, y, z) vinden we $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, dus volgens de eerste eis geldt

$$1 = 3(x^2+y^2+z^2) = (x^2+y^2+z^2)+2(x^2+y^2+z^2) \geq x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = (x+y+z)^2,$$

met gelijkheid d.e.s.d.a. $x = y = z$. We willen nu deze twee ongelijkheden,

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z) \tag{2}$$

en

$$1 \geq (x + y + z)^2 \tag{3}$$

met elkaar combineren. Hiervoor vermenigvuldigen we eerst (3) met de niet-negatieve factor $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$; dan krijgen we

$$(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \cdot 1 \geq (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \cdot (x + y + z)^2$$

met gelijkheid d.e.s.d.a. $x = y = z$ of $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 0$. Verder vermenigvuldigen (2) met de niet-negatieve factor $(x + y + z)^2$, waaruit volgt

$$(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \cdot (x + y + z)^2 \geq xyz(x + y + z) \cdot (x + y + z)^2$$

met gelijkheid d.e.s.d.a. $xy = yz = zx$ of $x + y + z = 0$. Al met al vinden we

$$(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \cdot 1 \;\geq\; (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \cdot (x + y + z)^2 \;\geq\; xyz(x + y + z) \cdot (x + y + z)^2,$$

oftewel (1), met gelijkheid d.e.s.d.a.

$$\big(x = y = z \text{ of } x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 0\big) \text{ en } (xy = yz = zx \text{ of } x + y + z = 0)\,.$$

Nu zegt de tweede vergelijking dat hier inderdaad gelijkheid moet gelden, dus we zitten in het zojuist beschreven gelijkheidsgeval. Daarnaast zegt de eerste eis nog steeds dat $3(x^2 + y^2 + z^2) = 1$:

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1, \\ x = y = z \quad \text{of} \quad x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 0, \\ xy = yz = zx \quad \text{of} \quad x + y + z = 0. \end{aligned}$$

We onderscheiden twee gevallen. Stel eerst $x = y = z$. Dan wordt automatisch voldaan aan $xy = yz = zx$. We vinden met behulp van de eerste eis dat $1 = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 9x^2 = (3x)^2$, dus $x = y = z = \pm\frac{1}{3}$.
Stel nu dat $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 0$; dan moet wel elk van de termen nul zijn, dus $xy = yz = zx = 0$, dus ook nu wordt voldaan aan $xy = yz = zx$. Uit $xy = 0$ volgt dat (z.b.d.a.) $x = 0$. Uit $yz = 0$ ook z.b.d.a. dat $y = 0$. Zo vinden we de oplossingen $(0, 0, \pm\frac{1}{3}\sqrt{3})$ en daarnaast ook $(0, \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$ en $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0, 0)$. □

Opmerking. Als je (2) en (3) hebt bewezen, kun je (1) ook vinden door (3) te vermenigvuldigen met $xyz(x+y+z)$. Hiervoor moet je dan wel aantonen dat $xyz(x+y+z)$ niet-negatief is. We weten vanwege de tweede eis in de opgave dat $xyz(x + y + z)^3$ gelijk is aan een som van kwadraten en dus niet-negatief. Als $x + y + z \neq 0$, volgt hieruit $xyz(x+y+z) \geq 0$. Als $x+y+z = 0$, dan geldt $xyz(x+y+z) = 0$. Dus in beide gevallen geldt $xyz(x + y + z) \geq 0$.
Het gelijkheidsgeval wordt bij deze methode:

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1, \\ xy = yz = zx, \\ x = y = z \quad \text{of} \quad xyz(x + y + z) = 0. \end{aligned}$$