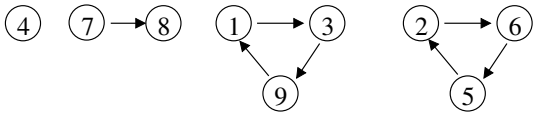
Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 13 maart 2015

Uitwerkingen

B-opgaven

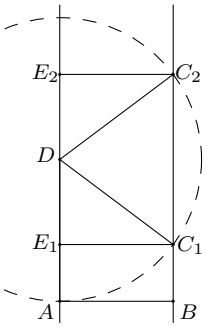
B1. 6 De veelvouden van 13 die uit twee cijfers (ongelijk 0) bestaan zijn 13, 26, 39, 52, 65, 78 en 91. In een dertienig getal kan een 1 dus alleen gevolgd worden door een 3 en een 2 alleen door een 6. Cijfer 4 kan door geen enkel cijfer gevolgd worden. In de figuur is voor elk cijfer aangegeven welk cijfer kan erop kan volgen.



Voor het eerste cijfer van een dertienig getal van meer dan twee cijfers kunnen we dus alleen uit 1, 3, 9, 2, 6 en 5 kiezen. Vervolgens liggen alle volgende cijfers vast.

We zien nu dat 13913, 26526, 39139, 52652, 65265 en 91391 de dertienige getallen van vijf cijfers zijn. Dat zijn er dus 6.

B2. $6 \pm \sqrt{11}$ Bekijk lijnstuk AB met lengte 5 en twee lijnen loodrecht hierop door punten A en B. Punt D ligt op de lijn door A op afstand 6 van A en punt C ligt op de lijn door B aan dezelfde kant van AB als punt D. Omdat $|CD| = 6$ ligt punt C op de cirkel rondom D met straal 6. Dat geeft twee mogelijkheden voor het punt C, die we aangeven met C_1 en C_2, zie ook de figuur. Neem nu de loodrechte projecties van C_1 en C_2 op AD en noem die E_1 respectievelijk E_2. De stelling van Pythagoras vertelt ons nu dat



$$|DE_1|^2 = |DC_1|^2 - |C_1E_1|^2 = 6^2 - 5^2 = 11.$$

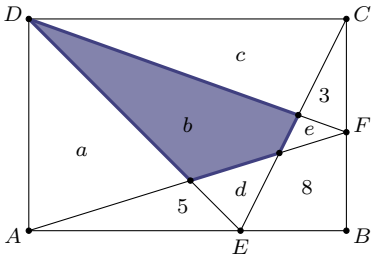
Dus $|DE_1| = \sqrt{11}$ en $|BC_1| = |AE_1| = |AD| - |DE_1| = 6 - \sqrt{11}$. Op precies dezelfde manier vinden we dat $|DE_2| = \sqrt{11}$ en dus $|BC_2| = |AE_2| = |AD| + |DE_2| = 6 + \sqrt{11}$.
De mogelijke waarden voor $|BC|$ zijn dus $6 - \sqrt{11}$ en $6 + \sqrt{11}$.

B3. 189 Laat n het aantal personen (inclusief Berry) zijn. Iedereen krijgt in eerste instantie $\frac{756}{n}$ frambozen. Drie vrienden geven daarna elk $\frac{1}{4} \cdot \frac{756}{n} = \frac{189}{n}$ frambozen terug aan Berry. Hieruit volgt dat 189 deelbaar moet zijn door n.

Het aantal vrienden is minstens 3, dus $n \geqslant 4$. Ook geldt dat $n \leqslant 8$, want als $n \geqslant 9$, dan krijgt iedereen in eerste instantie niet meer dan $\frac{756}{9} = 84$ frambozen, zodat Berry er in totaal niet meer dan $84 + 3 \times 21 = 147$ eet. Dit spreekt het feit tegen dat hij er meer dan 150 at.

Van de opties $n = 4, 5, 6, 7, 8$ is $n = 7$ de enige mogelijkheid, want 189 is niet deelbaar door 4, 5, 6 of 8. Iedereen kreeg dus $\frac{756}{7} = 108$ frambozen, waarna drie vrienden elk $\frac{108}{4} = 27$ frambozen teruggaven. Berry at in totaal dus $108 + 3 \times 27 = 189$ frambozen.

B4. 16 Noem de punten en de gebieden zoals in de figuur. De oppervlakte van driehoek ADF is gelijk aan $a+b+e$ en ook aan de helft van de oppervlakte van rechthoek $ABCD$. De oppervlakte van driehoek CDE is gelijk aan $b+c+d$ en ook aan de helft van de oppervlakte van rechthoek $ABCD$. Als we deze twee oppervlaktes optellen krijgen we de oppervlakte van de gehele rechthoek. We vinden dus dat



$$(a+b+e)+(b+c+d)=a+b+c+d+e+3+5+8.$$

Door van beide kanten van de vergelijking $a+b+c+d+e$ af te trekken, vinden we $b=3+5+8=16$.

B5. 5 Zie de linker figuur hieronder. Een goedgeplaatste een en een goedgeplaatste vijf kunnen alleen op een vakje met een A staan omdat alle andere getallen in dezelfde rij/kolom aan dezelfde kant van dat getal moeten staan. Een goedgeplaatste twee of vier kan alleen in een vakje met een B staan en een goedgeplaatste drie kan alleen op vakje C.

A				A
	B		B	
		C		
	B		B	
A				A

A	5			A
5	**4**		B	
		C		
	B		B	
A				A

Omdat er in een rij of kolom niet twee gelijke cijfers kunnen staan, kunnen er niet meer dan twee goedgeplaatste enen zijn. Zo zijn er ook niet meer dan twee goedgeplaatste tweeën, vieren of vijven. Als er een goedgeplaatste vier is, dan moeten op de twee vakjes ernaast vijven staan (zie rechter figuur). Op drie van de vier vakjes met een A kan dan geen vijf meer staan omdat er anders twee vijven in een rij of kolom staan. Met twee goedgeplaatste vieren kan op géén van die vier vakjes een vijf staan. Daarom kan het aantal goedgeplaatste vieren en vijven samen niet meer zijn dan twee.

Op vergelijkbare wijze volgt dat het aantal goedgeplaatste tweeën en enen samen niet meer kan zijn dan twee. We mogen dus concluderen dat er in totaal niet meer dan $2+2+1=5$ goedgeplaatste getallen kunnen zijn.

Nu zullen we laten zien dat het ook echt mogelijk is om 5 goed geplaatste getallen te hebben. Hoewel één voorbeeld volstaat voor het bewijs, geven we hier twee verschillende voorbeelden van een vierkant met 5 goed geplaatste getallen.

1	3	2	4	**5**
2	4	1	5	3
4	5	**3**	1	2
3	1	5	2	4
5	2	4	3	**1**

1	5	2	4	3
5	**4**	1	3	2
2	1	**3**	5	4
4	3	5	**2**	1
3	2	4	1	**5**

C-opgaven

C1. a) Kees begint met drie getallen $a < b < c$. De drie sommen zijn dan als volgt geordend: $a+b < a+c < b+c$. Als deze mooi verspreid zijn, dan is het verschil $(b+c)-(a+c) = b-a$ gelijk aan $(a+c)-(a+b) = c-b$. Dit is precies de voorwaarde waaronder de drie oorspronkelijke getallen a, b en c mooi verspreid zijn. Jan heeft dus gelijk.

b) Jan kan dit voor elkaar krijgen door te beginnen met de vier getallen $0, 1, 2$ en 4. De zes uitkomsten zijn dan $0+1=1$, $0+2=2$, $1+2=3$, $0+4=4$, $1+4=5$ en $2+4=6$ en die zijn mooi verspreid. □

C2. In de volgende gevallen is er een kleuring van het bord dat voldoet aan de eisen.

- $m = n$ is even
  In dit geval kleuren we het bord volgens een schaakbordpatroon. Dat wil zeggen: in elke rij en kolom zijn de vakjes afwisselend zwart en wit. Die kleuring voldoet aan alle eisen.
- $n = 2m$
  In dit geval kunnen we alle vakjes in de linkerhelft van het bord wit kleuren en alle vakjes in de rechterhelft zwart. Deze kleuring voldoet aan alle eisen.

Nu zullen we laten zien dat dit de enige mogelijkheden zijn. Beschouw een ingekleurd bord dat aan alle eisen voldoet. Omdat er in elke rij evenveel zwarte als witte vakjes zijn, moet het aantal vakjes in een rij deelbaar zijn door 2. Schrijf $n = 2k$. Elke rij heeft nu precies k witte en precies k zwarte vakjes. Bekijk nu de linkerkolom. Als alle vakjes in de linkerkolom wit zijn, dan heeft de kolom k witte vakjes vanwege de tweede eis. We hebben dan $m = k$. Hetzelfde gebeurt als alle vakjes in de linkerkolom zwart zijn. Als er zowel witte als zwarte vakjes voorkomen in de linkerkolom, dan moeten er vanwege de tweede eis precies k witte en k zwarte vakjes zijn en vinden we $m = 2k = n$.

We concluderen dat er voor een paar (m, n) een kleuring bestaat dan en slechts dan als $n = 2m$ of als $m = n$ en n is even. □

© 2015 Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade