Op weg naar IMO2011

IMO2009 - OPGAVE 2

[David Kok]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

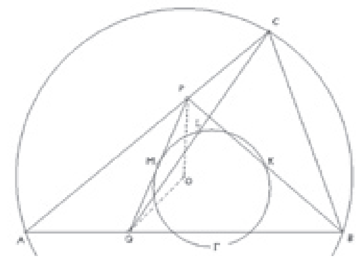
Aan het eind van het schooljaar 2009 vertrok ons IMO-team naar Bremen om daar Nederland te vertegenwoordigen op de IMO. Hoewel Bremen niet bijzonder exotisch is, hadden we er allemaal erg veel zin in: het was van tevoren al duidelijk dat het leuk zou worden. In Bremen probeerden we in twee keer, in 4½ uur tijd, zes lastige problemen op te lossen. Het lukte mij om hiervan één probleem compleet op te lossen, en één grotendeels – een resultaat waarmee ik meer dan tevreden was. In dit artikel wil ik mijn aanpak van de tweede opgave beschrijven.

De opgave

Zij ABC een driehoek en O het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Laat P en Q inwendige punten zijn van respectievelijk de zijden CA en AB. Laat K, L en M de middens zijn van respectievelijk de lijnstukken BP, CQ en PQ en zij Γ de cirkel door K, L en M.
Veronderstel dat de lijn PQ raakt aan de cirkel Γ.
Bewijs dat $|OP| = |OQ|$.

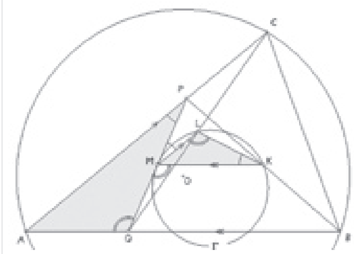
Het eerste dat opvalt is, dat we heel veel informatie hebben, waarvan het niet duidelijk is wat we er mee moeten doen. Om eens een goed overzicht te krijgen beginnen we met het maken van een schetsje, en daarna een net plaatje; ***zie figuur 1***.

Hoewel erg nuttig, lost dit plaatje niet meteen het probleem voor ons op. Daarom gaan we stuk voor stuk onze gegevens doorlopen om te kijken wat we er mee kunnen. Misschien lopen we wel per ongeluk tegen de oplossing aan bij het op een andere manier opschrijven van onze informatie.



figuur 1

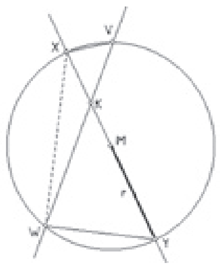
Alleen met het midden van een lijnstuk kan je niet zo heel veel. Met lijnen zelf daarentegen wel, dus we trekken de lijntjes KM, ML en LK. Omdat M het midden is van PQ, en L het midden van CQ, is ML een middenparallel in driehoek PQC. We weten nu dus dat ML en CP evenwijdig lopen en dat $|CP|$ precies twee keer zo groot is als $|ML|$.
Net zo goed is MK een middenparallel in driehoek PQB, want K is het midden van BP, en M nog steeds het midden van PQ. We weten dus dat MK en QB evenwijdig lopen en dat $|QB|$ precies twee keer zo groot is als $|MK|$. Zo hebben we uit een klein deel van onze gegevens toch al veel nuttige informatie gehaald!
Dan nu onze volgende (en tevens laatste) gegevens: PQ raakt aan Γ. Er is een handige stelling die we kunnen gebruiken om met dit gegeven iets te doen: de *Raaklijn-Omtrekshoekstelling*. Deze stelling zegt ons dat, omdat PQ een raaklijn is in M, de hoeken MKL en PML gelijk moeten zijn. Ook zegt dezelfde stelling (om dezelfde reden) dat de hoeken MLK en QMK gelijk moeten zijn. Nu we al onze informatie hebben omgeschreven naar (hopelijk nuttigere) informatie, maken we een nieuw plaatje, waarin we alles noteren; ***zie figuur 2***.
We zien dat LM en AC evenwijdig zijn, dus



figuur 2

hebben we Z-hoeken: $\angle PML = \angle MPA$. Maar omdat we ook al wisten dat $\angle PML = \angle MKL$, weten we nu dat $\angle MKL = \angle MPA$. Ook weten we dat MK en AB evenwijdig zijn, en opnieuw hebben we Z-hoeken: $\angle AQM = \angle QMK$. Alweer weten we al iets over die hoek, want $\angle QMK = \angle MLK$. Hieruit krijgen we: $\angle MLK = \angle AQM$.
Na dit in het plaatje genoteerd te hebben, zien we iets heel leuks: twee van de hoeken in driehoek AQP zijn gelijk aan twee van de hoeken in driehoek MLK! Hieruit volgt een gelijkvormigheid: $\Delta AQP \sim \Delta MLK$. We weten nog niet wat we er precies mee moeten, maar het is een mooi tussenresultaat.
Inmiddels hebben we al onze informatie gebruikt en omgeschreven. Dan wordt het nu tijd om te kijken wat we eigenlijk willen bewijzen: $|OP| = |OQ|$.
In ons plaatje lijkt het wel waar te zijn, dat is een goed teken. De meest voor de hand liggende manier om te bewijzen dat twee lengtes, $|OP|$ en $|OQ|$, gelijk zijn, is door te bewijzen dat driehoek POQ gelijkbenig is met $\angle OPQ = \angle PQO$.
Alleen weten we eigenlijk helemaal niks van punt O, en die hoeken komen verder niet in ons plaatje voor. We kunnen ze natuurlijk zelf invoeren, maar we weten te weinig over punt O om deze hoeken uit te rekenen. Daarom moeten we iets slims verzinnen om $|OP|$ en $|OQ|$ uit te rekenen, met behulp van een stelling die te maken heeft met het middelpunt van onze cirkel.

Nu leren IMO-deelnemers in de voorbereiding op deze wedstrijd een aantal heel nuttige stellingen, waaronder de *Machtstelling*. Deze zegt dat, als we een cirkel nemen en een punt K binnen de cirkel en dan een lijn door dat punt trekken die de cirkel twee keer snijdt, in V en W, dan het product $|KV| \cdot |KW|$ gelijk is aan $r^2 - |KM|^2$, met M het middelpunt van de cirkel en r de straal. Hieronder even een kort bewijs (***zie figuur 3***).



figuur 3

Er geldt $\angle XVK = \angle KYW$ wegens de *constante-hoekstelling* (op koorde WX). Ook geldt $\angle XKV = \angle YKW$ (*overstaande hoeken*). Dus geldt $\Delta VKX \sim \Delta YKW$ (*hh*). Dus:

$$\frac{|KV|}{|KY|} = \frac{|KX|}{|KW|}$$

oftewel:

$$\begin{aligned} |KV| \cdot |KW| &= |KX| \cdot |KY| = \\ &= (r - |KM|)(r + |KM|) \\ &= r^2 - |KM|^2 \end{aligned}$$

Dit getal heet de *macht* van K bij de cirkel. Wat opvalt bij deze stelling is dat het product $|KV| \cdot |KW|$ alleen afhankelijk is van $|KM|$ voor een gegeven cirkel.

Dit kunnen we goed gebruiken bij de opgave: in plaats van naar de lengtes $|OP|$ en $|OQ|$ te kijken, kunnen we ook naar $r^2 - |OP|^2$ en $r^2 - |OQ|^2$ kijken, dus naar de machten van P en Q ten opzichte van een of andere cirkel met middelpunt O en straal r.
Door deze stelling toe te passen hoeven we niet te gaan zoeken naar een manier om de lengte $|OP|$ uit te rekenen; we zijn heel handig van dat onbekende punt O afgekomen! Dat wil zeggen, als we een geschikte cirkel kunnen vinden met O als middelpunt. Dus we pakken het plaatje er weer eens bij.
De omgeschreven cirkel van driehoek ABC heeft middelpunt O, en dat is verder ook de enige cirkel waarover we een beetje informatie hebben. Daarom gaan we eerst proberen te kijken of ons trucje met juist deze cirkel gaat werken.
We hebben precies één lijn door P die de cirkel (nu al) twee keer snijdt, AC, en omdat het niet aantrekkelijk is om nieuwe dingen in te voeren, gaan we maar eens gewoon met deze lijn werken. Hetzelfde geldt voor Q: opnieuw is er één lijn, AB, die er aantrekkelijker uitziet dan andere mogelijkheden. Wat we met ons trucje dus eigenlijk zouden willen bewijzen, is dat:

$$\begin{aligned} |AP| \cdot |PC| = r^2 - |OP|^2 &\overset{?}{=} r^2 - |OQ|^2 \\ &= |AQ| \cdot |QB| \end{aligned}$$

Als we die twee buitenste delen aan elkaar gelijk kunnen praten, is het bewijs rond.

Even kijken hoe we er tot nu voor staan: wat we weten en wat we willen. Na een lange tijd puzzelen weten we dat de driehoeken AQP en MLK gelijkvorming zijn, en door *als wilde gok* de machtstelling toe te passen weten we dat de uitspraak:
$|AP| \cdot |PC| = |AQ| \cdot |QB|$
equivalent is aan het gevraagde; dus dat willen we nu gaan proberen te bewijzen.
Uit onze gelijkvormigheid kunnen we halen dat:

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|MK|}{|ML|}$$

Dus kunnen we kunnen het te bewijzen nog verder omschrijven:

$$\frac{|QB|}{|PC|} \overset{?}{=} \frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|MK|}{|ML|}$$

Als deze buitenste twee termen gelijk zijn, zijn we ook al klaar. Omdat we opnieuw niet zien wat we hiermee moeten, pakken we het plaatje er dus weer bij.
In ons plaatje staat nog dat MK en ML middenparallellen zijn! En daarom geldt:
$|QB| = 2 \cdot |MK|$ en $|PC| = 2 \cdot |ML|$
Dus geldt ook:

$$\frac{|QB|}{|PC|} = \frac{2 \cdot |MK|}{2 \cdot |ML|} = \frac{|MK|}{|ML|}$$

Dat is precies wat we nog moesten bewijzen! Met deze laatste stap is het bewijs rond; we hebben het gevraagde bewezen.

Info
Website 2011: *www.imo2011.nl*

Over de auteur
David Kok is eerstejaars student wis- en natuurkunde aan de Universiteit Leiden. In 2009 heeft hij meegedaan aan de IMO in Bremen, en in 2010 ging hij mee naar de IMO in Astana (Kazachstan), waar hij een bronzen medaille behaalde.
E-mailadres: *daviduitdelft@gmail.com*