De Nederlandse Wiskunde Olympiade heeft sinds een paar jaren een kleiner broertje: de Junior Wiskunde Olympiade (JWO), speciaal voor de onderbouwfinalisten van de welbekende Kangoeroewedstrijd. Dat de wedstrijd bedoeld is voor jongere leerlingen, wil nog niet zeggen dat de opgaven makkelijk zijn. Er is heel wat creativiteit en inzicht vereist om de opgaven te kraken. In dit artikel bekijken we enkele opgaven van de vijfde editie van de JWO, gehouden op 12 oktober aan de Vrije Universiteit in Amsterdam.

■ door Birgit van Dalen en Quintijn Puite

DOORDENKERS VOOR JUNIOREN

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

De eerste opgave die de negentig deelnemers aan de JWO voor hun kiezen kregen, was deze:

> In een zakje zitten rode en blauwe knikkers. Van deze knikkers is $\frac{3}{5}$ deel blauw, de rest rood. Als we het aantal rode knikkers in het zakje verdubbelen, welk deel van de knikkers is dan blauw?

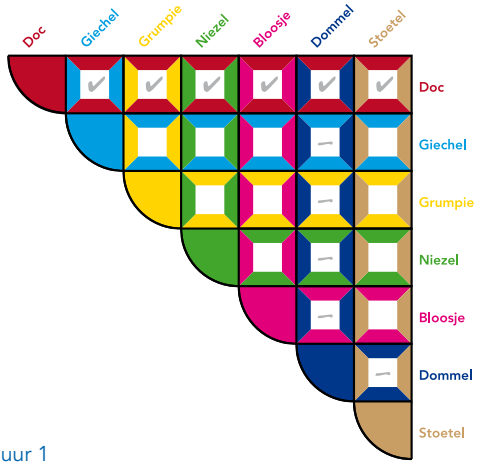
Je eerste gevoel bij deze opgave is misschien: er ontbreekt een gegeven. Want als je niet weet hoeveel knikkers er in het zakje zitten, hoe moet je dan weten hoeveel $\frac{3}{5}$ daarvan is? Maar na even nadenken en misschien even uitproberen met wat getalletjes, zie je dat het niet uitmaakt hoeveel knikkers er in het begin zijn. We kunnen hoe dan ook alle knikkers opdelen in groepjes van vijf, met steeds drie blauwe en twee rode. Hoeveel groepjes er zijn, weet je niet, maar we kunnen gewoon per groepje kijken wat er gebeurt. De rode knikkers worden verdubbeld, dus in elk groepje voegen we nog twee rode knikkers toe. Nu zijn er in elk groepje drie blauwe en vier rode knikkers, totaal dus zeven knikkers. Omdat elk groepje er hetzelfde uit ziet, kunnen we direct concluderen dat $\frac{3}{7}$ deel van de knikkers nu blauw is. Dat is dus het goede antwoord.

ACHT KAARTJES Een paar opgaven verderop stond deze:

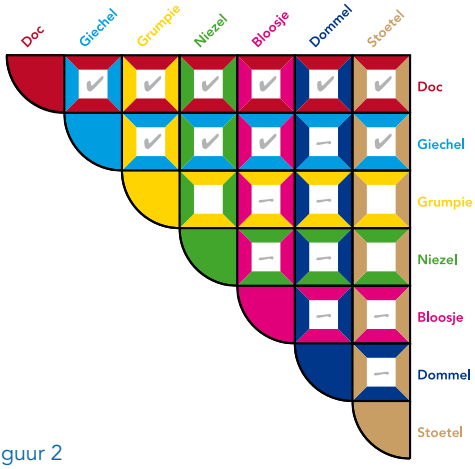
> Ans, Ben, Carla en Dirk doen mee aan een verloting. In een hoed liggen acht kaartjes met de getallen 1 tot en met 8. Eén voor één nemen ze twee kaartjes uit de hoed, waarbij Dirk de laatste twee kaartjes neemt. Om het spannend te maken, telt iedereen zijn of haar twee getallen bij elkaar op en vertelt het antwoord aan de anderen. Voor Ans is dat 10, voor Ben 14 en voor Carla 5. Welke getallen heeft Dirk genomen?

Ook hier lijk je weer veel te weinig gegevens te hebben; als je niet weet welke getallen Ans, Ben en Carla hebben genomen, maar alleen wat die getallen bij elkaar opgeteld zijn, dan kun je toch niet weten welke getallen Dirk heeft...? Maar dat is natuurlijk juist de uitdaging.

Van Ans weten we alleen dat de twee getallen op haar kaarten bij elkaar 10 zijn, maar daarmee schieten we nog niet zoveel op: je kunt 10 immers maken als 4 + 6, als 3 + 7 en als 2 + 8. Bij Ben gaat het beter: hij heeft opgeteld 14 en dat kan alleen gemaakt worden als 6 + 8. Blijkbaar heeft Ben dus 6 en 8 gepakt. Dus dan vallen voor Ans de opties



Figuur 1



Figuur 2

4 + 6 en 2 + 8 af; zij heeft dus 3 en 7 gepakt. Dan nu Carla: die heeft 5, wat je kan krijgen als 2 + 3 of 1 + 4. Maar omdat Ans de 3 al had, heeft Carla dus 1 en 4 gepakt. Al met al blijven voor Dirk alleen de getallen 2 en 5 over.

SNEEUWWITJE EN DE ZEVEN DWERGEN

Bij de volgende opgave ligt het antwoord nog dieper verscholen in alle gegevens.

> Terwijl Sneeuwwitje aan het koken is, spelen de zeven dwergen potjes schaak. Doc speelt tegen alle zes andere dwergen. Giechel speelt tegen vijf anderen, Grumpie tegen vier anderen, Niezel tegen drie anderen, Bloosje tegen twee anderen en Dommel speelt tegen één andere dwerg, waarna hij in slaap valt. Tegen hoeveel andere dwergen speelt Stoetel, de zevende dwerg?

Hier is het handig om een schemaatje te maken van de gespeelde wedstrijden. Het lijkt wel alsof je van geen enkele dwerg weet tegen wie hij speelt, maar dat is niet helemaal waar: Doc speelt tegen iedereen, dus van alle anderen weten we dan ook al dat die tegen Doc spelen. In het bijzonder is de enige wedstrijd van Dommel blijkbaar die tegen Doc. In figuur 1 is dit schematisch weergegeven, waarbij we vijf minnetjes zetten in in alle vakjes die verder bij Dommel horen.

In het schema zie je nu direct dat Giechel nog maar tegen vier anderen dan Doc kan spelen, want Dommel is afgevallen. Hij speelt ook precies vijf wedstrijden volgens de opgave, dus het moet wel zo zijn dat hij ook tegen Grumpie, Niezel, Bloosje en Stoetel speelt. En nu is Bloosje alweer vol: die speelt blijkbaar alleen tegen Doc en Giechel. We vullen zijn vakjes aan met minnetjes, zie figuur 2.

Vervolgens kunnen we de twee wedstrijden van Grumpie ook maar precies op één manier aanvullen tot vier wedstrijden. En dan zien we dat Niezel al op drie wedstrijden zit, waardoor we nog een derde minnetje bij zijn vakjes kunnen zetten. Al met al vinden we dan het schema in figuur 3.

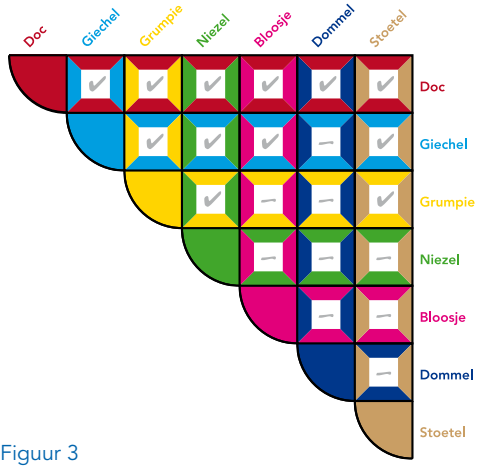
We lezen nu direct af dat Stoetel drie wedstrijden speelt, namelijk tegen Doc, Giechel en Grumpie.

PETERS GETALLEN

De JWO bestaat uit twee delen; voor elk deel is een uur de tijd. Eén van de laatste (en moeilijkste) opgaven uit het eerste deel was deze:

> Peter heeft een aantal getallen waarvan het gemiddelde 20 is. Laat hij het kleinste getal weg, dan is het gemiddelde van de overige getallen 22. Laat hij juist het grootste getal weg, dan wordt het gemiddelde 13. Laat hij zowel het grootste als het kleinste weg, dan wordt het gemiddelde 14. Hoeveel getallen heeft Peter?

Bij deze opgave is het handig om een naam in te voeren voor een paar dingen die je nog niet weet. Bijvoorbeeld k voor het kleinste getal, g voor het grootste getal en n voor het aantal getallen. Als Peter het kleinste getal weglaat, zijn er nog $n - 1$ getallen over. Het gemiddelde van deze getallen is 22, dus al deze $n - 1$ getallen bij elkaar opgeteld zijn $22 \times (n - 1)$. Als Peter daarnaast ook nog het grootste getal weglaat, wordt het gemiddelde van de $n - 2$ overgebleven getallen 14. Dus deze $n - 2$ getallen bij elkaar zijn $14 \times (n - 2)$. Het grootste getal is dus het verschil tussen $22 \times (n - 1)$ en $14 \times (n - 2)$, dus $g = 22 \times (n - 1) - 14 \times (n - 2) = 22 \times n - 22 - 14 \times n + 28 = 8 \times n + 6$.



Figuur 3

Maar we weten ook dat het gemiddelde van alle n getallen waar Peter mee begint, gelijk is aan 20. Dus die getallen opgeteld zijn samen $20 \times n$. En als we het grootste weglaten, komen we op $13 \times (n - 1)$. We kunnen het grootste getal dus ook berekenen als $20 \times n - 13 \times (n - 1)$, dus $g = 20 \times n - 13 \times n + 13 = 7 \times n + 13$.

Blijkbaar is het grootste getal tegelijkertijd gelijk aan $8 \times n + 6$ en aan $7 \times n + 13$. Gelijkstellen levert $8 \times n + 6 = 7 \times n + 13$, dus $n + 6 = 13$, dus $n = 7$. Peter heeft dus 7 getallen.

Zoals je ziet, kunnen we in deze mysterieuze opgave het aantal getallen bepalen zonder de getallen zelf te weten! Overigens kun je met wat we nu weten, wel ook het grootste en kleinste getal uitrekenen. Maar de vijf getallen daartussen blijven voor altijd een raadsel.

DRIECIJFERIG GETAL We sluiten af met een opgave uit deel 2 van de JWO:

> Bij een getal van drie cijfers tel je de drie cijfers zelf op. Het getal 216 wordt bijvoorbeeld 216 + 2 + 1 + 6 = 225. Wat is het grootste getal van drie cijfers dat je op die manier niet kunt maken?

Hier heb je een heel concreet recept om getallen mee te maken. In principe kunnen we dit toepassen op alle getallen van drie cijfers en dan zien we vanzelf welke getallen we niet kunnen maken. Maar dat zou nogal veel werk zijn, want er zijn 900 getallen van drie cijfers (van 100 tot en met 999). Toch is het, om een idee te krijgen, wel handig om dit recept eens toe te passen op een paar willekeurige getallen:

$324 \rightarrow 324 + 3 + 2 + 4 = 331,$
$511 \rightarrow 511 + 5 + 1 + 1 = 518,$
$899 \rightarrow 899 + 8 + 9 + 9 = 925,$
$950 \rightarrow 950 + 9 + 5 + 0 = 964.$

Zo zien we dat de uitkomsten van het recept meestal een klein beetje groter zijn dan het oorspronkelijke getal, maar niet zo heel veel groter. Willen we dus proberen om 999 (het grootste getal van drie cijfers) te maken, dan moeten we behoorlijk grote getallen proberen. Bijvoorbeeld zo:

$990 \rightarrow 990 + 9 + 9 + 0 = 1008$	is te groot,
$985 \rightarrow 985 + 9 + 8 + 5 = 1007$	ook nog te groot,
$980 \rightarrow 980 + 9 + 8 + 0 = 997$	iets te klein,
$981 \rightarrow 981 + 9 + 8 + 1 = 999$	precies goed!

Nu hebben we 999 in elk geval gevonden. En verder hebben we nog meer dingen ontdekt: dat getallen die met 99 beginnen, altijd een te grote uitkomst geven (namelijk vier cijfers in plaats van drie). En dat van de getallen die met 98 beginnen, alleen 980 en 981 een uitkomst van drie cijfers geven. Welke getallen die met 97 beginnen, geven een uitkomst van drie cijfers? Even proberen laat zien dat het recept met begingetal 977 precies op 1000 uitkomt en dat 970 tot en met 976 de uitkomsten 986, 988, 990, 992, 994, 996 en 998 geven.

We hebben nu 999, 998, 997 en 996 al gevonden en verder nog wat even getallen kleiner dan dat. Dus 995 is misschien wel dat gezochte grootste getal van drie cijfers dat niet gemaakt kan worden. We kunnen dit niet maken door 980 (wat 997 oplevert) 1 kleiner te maken, want dan komen we in een reeks van even getallen, zoals we hebben gezien. Het volgende grootste oneven getal dat we kunnen maken, komt daarom van 969 en dat is 969 + 9 + 6 + 9 = 993. Dus 995 wordt inderdaad overgeslagen en is daarmee het goede antwoord van deze opgave.

EERSTE RONDE NWO Vind je dit leuke opgaven? En zit je in de onderbouw, klas 4 of klas 5? Dan kun je in januari meedoen aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Die zit vol met dit soort uitdagende, puzzelachtige opgaven: acht meerkeuzevragen en vier vragen waar je een getal als antwoord moet geven. Vraag aan je wiskundedocent of je op jouw school mee mag doen. ■