Op 23 maart deden zo'n 800 leerlingen mee aan de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO). In september zullen de 130 beste kandidaten met elkaar de strijd aangaan tijdens de finale. Daar krijgen zij vijf opgaven, waarvoor een volledige berekening of een sluitend bewijs gegeven moet worden. Tot die tijd kunnen de leerlingen op universiteiten terecht voor trainingen, waarin bewijstechnieken en nieuwe onderwerpen geoefend worden. Een van die bewijstechnieken is het principe van volledige inductie.

■ door Jan Brinkhuis en Adriana Gabor

INDUCTIE BIJ DE WIS

Stel je een oneindig lange rij dominostenen voor, genummerd 1, 2, 3, ... Als je steen 1 een zetje geeft, valt steen 2 om, die er op zijn beurt voor zorgt dat steen 3 omvalt. Dit gaat zo eindeloos door, maar dat tikje tegen steen 1 is wel noodzakelijk, anders wordt de *wave* niet in gang gezet.

De oneindige rij dominostenen is de klassieke metafoor voor het bewijsprincipe van *volledige inductie*. Dit principe komt vaak van pas als je iets wilt bewijzen voor alle natuurlijke getallen.

Opgave 1. Bewijs dat de som van de eerste *n* derdemachten een kwadraat is.

Begin gewoon met uitrekenen van de eerste paar gevallen: $1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$, en $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$. Er lijkt te gelden:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2. \qquad (*)$$

Met volledige inductie kunnen we deze bewering echt hardmaken. Dat gaat in twee stappen.

Stap 1 (inductiebasis). Ga na dat de formule geldt voor $n = 1$; inderdaad, 1^3 en 1^2 zijn aan elkaar gelijk: ze zijn allebei gelijk aan 1.

Stap 2 (inductiestap). Stel, we weten dat de formule geldt voor $n = k$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + \cdots + k)^2.$$

We gaan de formule nu bewijzen voor $n = k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \cdots + k + (k + 1))^2.$$

Aan de linkerkant is er $(k + 1)^3$ bijgekomen. Wat verandert er aan de rechterkant? Gebruik de formule $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, waarbij a staat voor $(1 + 2 + \cdots + k + (k + 1))$ en b voor $(1 + 2 + \cdots + k)$. Dan komt er aan de rechterkant bij: $(k + 1)((1 + 2 + \cdots + k) + (1 + 2 + \cdots + (k + 1))$.

Met behulp van de formule $1 + 2 + \cdots + k = k(k + 1)/2$ zie je dat dit te schrijven is als $(k + 1)(2 \cdot k(k + 1)/2 + (k + 1))$. Haal nu $(k + 1)$ buiten haakjes; binnen die haakjes blijft dan $k + 1$ over. Alles bij elkaar genomen geeft dit $(k + 1)^3$.

We kunnen nu concluderen dat formule $(*)$ geldt voor alle gehele getallen $n \geq 1$. Waarom is deze conclusie gerechtvaardigd? Neem bijvoorbeeld $n = 3$. De inductiebasis stelt dat de formule klopt voor $n = 1$ (bij de dominostenen is dat het handmatig gegeven zetje). Vervolgens stelt de inductiestap dat de formule klopt voor $n = k + 1 = 2$. Nog een keer de inductiestap toepassen levert op dat de formule klopt voor $n = 3$. Op dezelfde manier kunnen we voor élke vaste maar willekeurig gekozen n bewijzen dat de formule geldt: we beginnen met de inductiebasis en dan doen we $n - 1$ keer de inductiestap, voor successievelijk $k = 1, 2, ..., n - 1$. Dit bewijst de bewering voor het gekozen getal n.

Het bewijsprincipe van volledige inductie is heel krachtig, maar het heeft ook een nadeel. Het lukt niet om 'rechtstreeks' te bewijzen dat de som van de eerste n derdemachten een kwadraat is. Formule $(*)$ heb je echt nodig.

Trouwens, die formule geeft voorbeelden van een stel getallen waarvan de som van de derdemachten gelijk is aan het kwadraat van de som. Zou dat ook kunnen met stelletjes getallen die niet alleen maar opeenvolgend zijn? Ja, er geldt bijvoorbeeld:

$$6^3 + 3^3 + 4^3 + 2^3 + 2^3 + 1^3 = (6 + 3 + 4 + 2 + 2 + 1)^2.$$

KUNDE OLYMPIADE

Hoe zijn we hier aan gekomen? Eerst hebben we een willekeurig getal gekozen, hier het getal 75. Daarna hebben we alle delers bepaald en van iedere deler het aantal delers geteld: de delers zijn 75, 25, 15, 5, 3, 1 met respectievelijk 6, 3, 4, 2, 2, 1 delers. Dit werkt altijd; probeer dat zelf maar eens te bewijzen.

INDUCTIE EN MEETKUNDE Inductie kun je soms ook gebruiken als er helemaal geen sprake is van getallen, zoals uit de volgende opgave blijkt.

Opgave 2. Teken n lijnen in het vlak. Bewijs dat de gebieden die op deze manier ontstaan, zó gekleurd kunnen worden met geel en blauw, dat geen twee aan elkaar grenzende gebieden dezelfde kleur hebben.

Stap 1 (inductiebasis). Voor $n = 1$ zijn er 2 gebieden. Die kleuren we met geel en blauw.
Stap 2 (inductiestap). We nemen aan dat we gebieden, gevormd door k lijnen, altijd met geel en blauw kunnen kleuren.

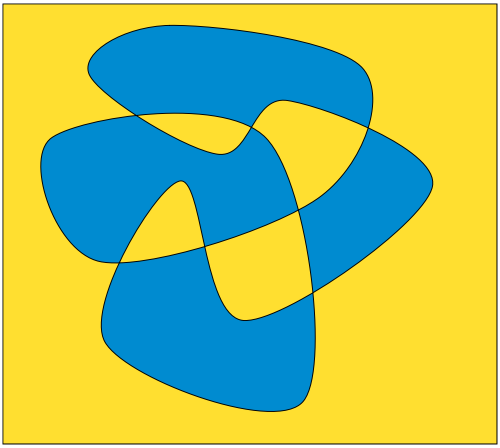
Bekijk nu $k + 1$ lijnen (teken een paar plaatjes mee, dan zie je hoe de kleuren veranderen na het trekken van lijn $k + 1$). Haal lijn $k + 1$ even weg en kleur de gebieden gevormd door de eerste k lijnen volgens de regels. Dit is mogelijk wegens onze aanname. Lijn $k + 1$ verdeelt het vlak in twee halve vlakken. In een van de twee halfvlakken laten we alle gebieden hun kleur behouden en in het andere halfvlak veranderen we juist alle gebieden van kleur. Neem nu twee gebieden die aan elkaar grenzen met een lijnstuk. We kunnen drie situaties onderscheiden:

1. Hun grens ligt op lijn $k + 1$. Dan zijn de twee gebieden uit één gebied ontstaan bij het trekken van lijn $k + 1$. Aanvankelijk had dat gebied één kleur, maar daarna hebben wij de kleur van één van de twee gebieden veranderd. Dus de twee gebieden hebben nu verschillende kleuren.

2. Hun grens ligt in het halfvlak waar we niets veranderd hebben. Dan hebben de gebieden nog steeds verschillende kleuren.

3. Hun grens ligt in het halfvlak waar we de kleur veranderd hebben. Oorspronkelijk hadden de gebieden verschillende kleuren. Omdat we de kleuren omgewisseld hebben, is dat nog steeds zo.

Je kunt ook een gesloten kromme lijn trekken die zichzelf mag snijden, zie figuur 1. Dan kun je nog steeds alle gebieden correct kleuren met alleen geel en blauw. Het bewijs mag je zelf proberen te ontdekken. Het moeilijkste punt is misschien: hoe vertaal je het kleuren van een landkaart in een bewering die afhangt van een natuurlijk getal n? Wat goed blijkt te werken, is om voor n het aantal pun-



Figuur 1 Kleuren van gebieden gevormd door een gesloten kromme.

ten te nemen waarin de kromme lijn zichzelf snijdt. Hoe zou je zo'n snijpunt kunnen weghalen?

Je kunt met dezelfde methode willekeurige landkaarten analyseren, en dan zie je dat twee kleuren voldoende zijn, dan en slechts dan als er geen drie- en vijflandenpunten zijn, noch andere punten waar een oneven aantal landen samenkomt.

Dit brengt ons bij een beroemde stelling die in de twintigste eeuw bewezen is: voor iedere kaart heb je aan vier kleuren genoeg als buurlanden niet dezelfde kleur mogen hebben. Bedenk zelf eens een kaart die niet met drie kleuren gekleurd kan worden. Het bewijs van de stelling gebruikt ook volledige inductie, maar er zijn zoveel technische details in het bewijs dat deze met een computer uitgevoerd moesten worden en niet met de hand gecontroleerd kunnen worden!

EEN OUDE OLYMPIADE-OPGAVE Nu een echte Wiskunde Olympiade opgave, een van meer dan veertig jaar geleden:

Opgave 3. (NWO, finale 1971). Voor ieder natuurlijk getal m definiëren we $a(m)$ als het aantal priemfactoren 2 in zijn priemontbinding. Voor positieve gehele n definiëren we $S(n)$ door:

$$S(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \dots + a(2^n).$$

Druk $S(n)$ uit in n.

We berekenen eerst $S(n)$ voor een paar kleine waarden van n. Het getal 1 heeft geen factor 2 in zijn ontbinding, dus $a(1) = 0$. Verder heeft 2 één factor 2, dus $a(2) = 1$. Dus $S(1) = 0 + 1 = 1$. Zo gaan we verder, en we krijgen de tabel die je in figuur 2 ziet.

Het is duidelijk dat $a(m) = 0$ voor alle oneven getallen: oneven getallen hebben geen factor 2 in hun priemontbinding. De laatste kolom suggereert

$$S(n) = 2^n - 1.$$

We gaan dit vermoeden met volledige inductie hard maken.

Stap 1 (inductiebasis). $S(1) = 1 = 2^1 - 1$, dus de bewering is waar voor $n = 1$.
Stap 2 (inductiestap). Stel dat voor $n = k$ geldt

$$S(k) = 2^k - 1.$$

We willen bewijzen dat $S(k + 1) = 2^{k+1} - 1$. We moeten een verband leggen tussen $S(k)$ en $S(k + 1)$. Probeer eerst $k = 2$. Het getal $S(3)$ is het aantal factoren 2 in de rij 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. De oneven getallen 1, 3, 5, 7 hebben geen factor 2, dus die kun je weglaten. De resterende even getallen 2, 4, 6, 8 hebben uiteraard allemaal minstens één factor 2. Deel ieder van die getallen door 2, dan we krijgen 1, 2, 3, 4. Het aantal factoren 2 hierin is $S(2)$. Dus $S(3) = 2^2 + S(2)$.

Dezelfde redenering kunnen we gebruiken voor het algemene geval $S(k + 1)$. Het getal $S(k + 1)$ is het aantal factoren 2 in de rij 1, 2, 3, ..., 2^{k+1}. Weglaten van de oneven getallen geeft de rij 2, 4, 6, ..., 2^{k+1}. Deel alles door 2, dit geeft de rij 1, 2, 3, ..., 2^k; het aantal factoren 2 in deze rij is $S(k)$. Deze redenering bewijst $S(k + 1) = 2^k + S(k)$. We hebben verondersteld dat $S(k) = 2^k - 1$. We krijgen dus

$$S(k + 1) = 2^k + (2^k - 1) = 2^{k+1} - 1.$$

n	$S(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \cdots + a(2^n)$	en dit is
1	0 + 1	1
2	0 + 1 + 0 + 2	3
3	0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 3	7
4	0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 3 + 0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 4	15

Figuur 2 De waarden van $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$ en $S(4)$.

De formule $S(n) = 2^n - 1$ geldt dus voor alle positieve gehele getallen n.

Je kunt deze opgave ook zo formuleren: druk het aantal factoren 2 in de priemontbinding van $(2^n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2^n$ uit in n. Je kunt met precies dezelfde methode voor ieder priemgetal p het aantal factoren p in $(p^n)!$ uitdrukken in p en n. Probeer dit eens, bijvoorbeeld voor $p = 3$.

TORENS VAN HANOI We eindigen met een klassieke puzzel: de *Torens van Hanoi*.

Opgave 4. Breng een toren van 64 schijven (met een gat in het midden) over van het eerste naar het derde stokje. Bij iedere zet mag maar één schijf naar een ander stokje verplaatst worden; hierbij mag nooit een grotere schijf boven op een kleinere schijf liggen. Hoe kan dit in zo min mogelijk zetten?

Stel we hebben een *k-strategie* gevonden, dat wil zeggen, de snelste manier om een toren van k schijven te verplaatsen naar een ander stokje. Noem $s(k)$ het aantal zetten voor de k-strategie. We proberen nu de $(k + 1)$-strategie te vinden. Bekijk de stap waarop de grootste schijf verplaatst wordt. Je ziet snel in dat je het beste zowel ervoor als erna de k-strategie toe kan passen: ervoor om de bovenste k schijven opzij te zetten, zodat je de onderste schijf naar een leeg stokje kunt verplaatsen; erna om de bovenste k schijven op de verplaatste schijf te krijgen. Dus

$$s(k + 1) = 2s(k) + 1.$$

Uiteraard is $s(1) = 1$: beweeg de ene schijf waaruit een 1-toren bestaat naar een ander stokje: dat is een zet. Met bovenstaande formule gaan we $s(2)$, $s(3)$, ... berekenen: $s(2) = 2s(1) + 1 = 3$, enzovoorts. Zo krijgen we de rij 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, …, ofwel de machten van 2 min één. Dat wil zeggen, het lijkt erop dat

$$s(n) = 2^n - 1$$

voor ieder aantal schijven n. Probeer zelf deze formule met volledige inductie te bewijzen.

Bij deze puzzel hoort een legende over priesters die iedere seconde een zet doen; als de toren helemaal verplaatst is, zou de wereld vergaan. Reken maar uit hoeveel jaren het duurt voordat alle $2^{64} - 1$ zetten gedaan zijn, en je zult concluderen dat er vooralsnog geen reden tot paniek is. ■

OEFENEN OP DE UNIVERSITEIT
De trainingen voor de NWO-finale zijn in april, mei en juni op diverse Nederlandse universiteiten. Tijdens een training wordt individueel of in groepjes nieuwe stof behandeld onder begeleiding van universitaire trainers. Het trainingsmateriaal van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, met onderwerpen als volledige inductie, priemgetallen, deelbaarheidscriteria, het extremenprincipe en het ladenprincipe, is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl/ft.

Figuur 3 De Torens van Hanoi met vier schijven.